

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu, Niš

Dejan M. Petković

Dejan D. Krstić

Vladimir B. Stanković

Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi
Sveska II

STACIONARNO ELEKTRIČNO POLJE I JEDNOSMERNA STRUJA

Niš, 2010. godine

Autori

Profesor dr Dejan M. Petković,

Fakultet zaštite na radu, Niš

Dr Dejan D. Krstić, docent

Fakultet zaštite na radu, Niš

Vladimir B. Stanković, die

Fakultet zaštite na radu, Niš

Medicinski konsultant

Dr Ljiljana Šurdilović-Petković,

Naslov

Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi, Sveska II

STACIONARNO ELEKTRIČNO POLJE I JEDNOSMERNNA STRUJA

Prvo izdanje, Niš, 2010.

Izdavač

Fakultet zaštite na radu, Niš

18000 Niš, Čarnojevića 10a

Za izdavača

Dekan fakulteta, profesor dr Ljiljana Živković

Recenzenti

Profesor dr Predrag Dimitrijević,

Prirodno-matematički fakultet, Niš

Profesor dr Dragan Veličković,

Fakultet zaštite na radu, Niš

Odlukom Naučno-nastavnog veća Fakulteta zaštite na radu u Nišu,
kvalifikovano kao udžbenik.

Tehnička obrada

Autori

Korice

Rodoljub Avramović

Fakultet zaštite na radu, Niš

Štampa

Rolerprint, Niš

Tiraž

200 primeraka

ISBN 978-86-6093-014-1

**Posvećeno uspomeni na
Akademika prof. dr Branka Popovića**

Sadržaj

Predgovor

- 01 - Električna struja
- 02 - Razlika potencijala i pojam stacionarnosti
- 03 - Stacionarna električna struja
- 04 - Prosto strujno kolo
- 05 - Stacionarno električno polje
- 06 - Pokretljivost nosilaca naelektrisanja
- 07 - Jačina električne struje - 1
- 08 - Smer električne struje
- 09 - Jačina električne struje - 2
- 10 - Gustina električne struje
- 11 - Jednačina kontinuiteta
- 12 - Jednačina kontinuiteta i merenje jačine struje
- 13 - Prvi *Kirchoffov* zakon
- 14 - Složena električna kola
- 15 - *Ohmov* zakon
- 16 - Izračunavanje otpornosti
- 17 - Ekvivalentne otpornosti
- 18 - Merenje otpornosti
- 19 - *Jouleov* zakon
- 20 - Temperaturna zavisnost otpornosti
- 21 - Snaga potrošača i izvora napajanja
- 22 - Elektromotorna sila
- 23 - Drugi *Kirchoffov* zakon
- 24 - Kondenzator u kolu jednosmerne struje - 1
- 25 - Kondenzator u kolu jednosmerne struje - 2
- 26 - Realni i idealni generatori - 1
- 27 - Realni i idealni generatori - 2
- 28 - Rešavanje električnih kola
- 29 - Teorema superpozicije
- 30 - *Théveninova* teorema
- 31 - *Nortonova* teorema
- 32 - Teorema kompenzacije
- 33 - Teorema reciprociteta
- 34 - Neposredna primena osnovnih zakona
- 35 - Metod konturnih struja
- 36 - Metod potencijala čvorova
- 37 - Analogija statičkog i stacionarnog električnog polja

- 38 - Elektroda sfernog oblika u homogenoj sredini
- 39 - Granični uslovi
- 40 - Teorema lika
- 41 - Uzemljivač oblika sfere
- 42 - Prelazna otpornost uzemljivača i napon koraka
- 43 - Merenje otpornosti uzemljivača
- 44 - O gustinama naelektrisanja
- 45 - Vreme relaksacije
- 46 – Neki efekti jednosmerne struje na ljude

Literatura

Predgovor

Tekst pod nazivom *Stacionarno električno polje i jednosmerna struja* je namenjen studentima Fakulteta zaštite na radu u Nišu i trebalo bi da posluži za savladavanje gradiva iz predmeta koji se, kako po starom tako i po novom nastavnom planu, izučavaju na ovom fakultetu. Dobrim delom tekst može da posluži i studentima drugih fakulteta. Tekst je prilagođen savremenim metodama učenja. Izučavanje elektromagnetnih zračenja podrazumeva neka prethodna znanja iz fizike, više matematike i elektrotehnike. I pored toga što se radi o izvodima sa predavanja u većini slučajeva data su sva neophodna objašnjenja.

Osnovna ideja prvopotpisanog autora je da kroz seriju Sveski iz oblasti elektromagnetike pruži kompletnu literaturu koja je potrebna inženjeru koji se bavi ili će se baviti zaštitom od uticaja elektromagnetnih polja. Tako je u ovoj svesci osim teorijskih izlaganja prikazano mnoštvo rezultata iz prakse, metodi merenja, kao i osvrt na postojeće standarde.

Tekst se može naći i na adresi **www.znrfak.ni.ac.rs**

U Nišu, na Vidovdan 2010. godine,
Autori

1 - Električna struja

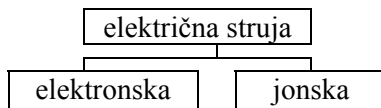
Kad se došlo do saznanja o električnoj struji, provodna tela su nazvana elektrodama (Grk: *electron* - *odós* - put kojim ide elektricitet). *Farady* je pri proučavanju elektrolize (Grk: *lýsis* - razlaganje, a ovde se radi o razlaganju neke tečnosti na sastojke pomoću električne struje) dao elektrodama nazive anoda (Grk: *ánodós* - put naviše) i katoda (Grk: *káthodós* - put naniže). Tako je i ostalo, za svako provodno telo je usvojen naziv elektroda; i tako je katoda negativno naelektrisana elektroda, a anoda pozitivno naelektrisana elektroda.

Sve do pojave elektronske teorije, krajem IX veka, smatralo se da je električna struja kretanje nestišljivog fluida koji teče kroz provodnike kao nestišljiva tečnost u cevima. Ovakvo shvatanje nije smetalo da budu otkriveni kvantitativni odnosi između električne struje i pratećih pojava, kao što su magnetno polje, termički efekti, elektrolitičke pojave i drugi efekti. Upravo su *Faradayevi* eksperimenti sa elektrolizom naveli *Helmholtza* da ukaže na postojanje elementarnih nosilaca naelektrisanja. Danas se pouzdano zna da su nosioci naelektrisanja elektroni i naelektrisane čestice materije ili joni (Grk: *ión* - ono što ide, materijalni delić kao nosilac naelektrisanja).

Električnu struju čini kretanje nosilaca naelektrisanja.

Za postojanje električne struje je potrebno da postoje:
slobodni nosioci naelektrisanja (elektroni i joni) i
izvori kretanja nosilaca naelektrisanja.

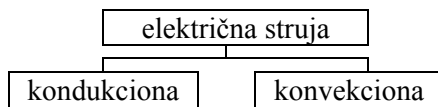
Elektronske struje nastaju u čvrstim provodnicima i u vakuumu. Jonske struje su karakteristične za elektrolizu.



Bitna razlika između ove dve vrste struja je što elektronske struje skoro ništa ne menjaju u sredini kroz koju protiču, dok kod jonskih struja dolazi do vidljivog prenosa mase.

Kretanje naelektrisanih tela, gde je izvor kretanja sila neelektričnog porekla ili kretanje nosilaca naelektrisanja zbog inercionih sila (na primer, snop elektrona u vakuumskoj cevi), je konvekciona struja.

Kondukcione struje ili struje provodnosti nastaju samo usled dejstva električnog polja.

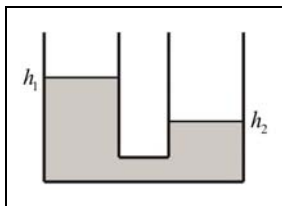


(Lat: *conductio* - provođenje elektriciteta i toplote; *convectio* - strujanje).

2 - Razlika potencijala i pojam stacionarnosti

Strujanje ili protok nestišljivog fluida između spojenih sudova je savršena analogija sa električnom strujom.

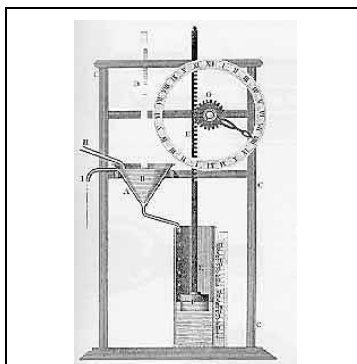
Protok tečnosti između spojenih sudova koji su napunjeni do različitih nivoa će se odvijati sve dok nivoi tečnosti u oba suda ne budu jednaki, tj. dok potencijalne energije ne budu jednake. Međutim, brzina strujanja tečnosti se vremenom smanjuje od početne vrednosti do nule.



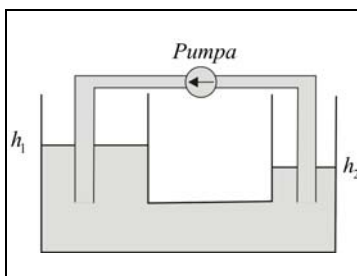
Očigledno da jednom napunjen jedan od spojenih sudova ne može da održi stalnu brzinu protoka tečnosti u drugi sud.

Još u antička vremena je bio konstruisan vodeni sat. Govornik je imao pravo govora sve dok voda ne iscuri iz jedne pune posude u drugu. Otuda i potiču termini *vreme je iscurelo* i *vreme je isteklo*. Međutim, smanjivanjem nivoa vode u posudi iz koje voda ističe vreme se za slušaoce produžavalo, a govornici bi čekali i poslednju kap da se prijemna posuda napuni.

Rešenje je pronađeno tako što je posuda iz koje voda ističe (izvor) uvek puna do vrha. To se obezbeđivalo stalnim prilivom vode u izvor, a višak vode bi odlazio sa strane. Primajuća posuda (ponor) se tako punila konstantnom brzinom i svim govornicima je bilo omogućeno jednako vreme, a ne *do poslednje kapi*. Tako je u vremenu ostvarena stalna razlika potencijalnih energija.



Da bi se ostvarila stalna brzina protoka tečnosti potrebno je iz prijemnog suda u izvorni prepumpavati tečnost kako bi razlika u nivoima (potencijalnim energijama) u vremenu ostala konstantna. Tako se obrazuje jedan zatvoreni sistem ili zatvoreno kolo u kome postoji izvor - pumpa.



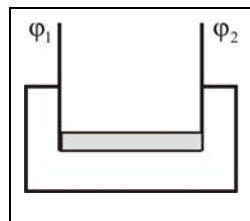
Stacionarno strujanje (N.Lat: *stationarius* - nepokretan) je nepromenljivo u vremenu i smeru proticanja i za to je neophodan izvor energije.

Stacionarne struje su jednosmerne.
U vremenu se ne menja brzina protoka.

3 - Stacionarna električna struja

Struja nastaje usled razlike u potencijalima tj. potencijalnim energijama. Ako se između elektroda kondenzatora unese provodno telo koje spaja elektrode, pod dejstvom električnog polja doći će do prenosa naelektrisanja sa elektrode koja je na višem potencijalu do elektrode koja je na nižem potencijalu, tj. do uspostavljanja električne struje. Struja će proticati sve dok potencijali elektroda ne budu izjednačeni, tj. sve do nestanka električnog polja.

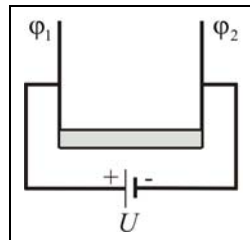
Jednom napunjen kondenzator ne može da održi stalnu struju, jer se potencijalna razlika stalno smanjuje. Dielektrici su u većoj ili manjoj meri provodni, pa se svaki kondenzator ispunjen, bar delimično, dielektrikom pre ili kasnije potpuno isprazni.



Za protok stacionarne električne struje je potrebno:

- ◆ zatvoreno strujno kolo
- ◆ izvor koji održava stalnu potencijalnu razliku u kolu

U izvorima stalne potencijalne razlike tj. električnog napona deluju sile neelektričnog porekla koje vrše razdvajanje pokretljivih nosilaca naelektrisanja i potiskuju ih prema krajevima. Kao što pumpa u zatvorenom kolu protoka tečnost vrši rad protiv sile gravitacije, tako izvor napona u zatvorenom strujnom kolu vrši rad protiv sila električnog porekla.



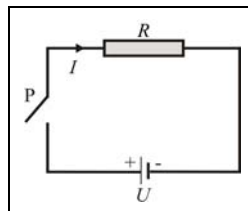
Izvori stalnog napona su većinom elektrohemijski, fotoelektrični i elektromehanički. To su generatori (Lat: *generator* - roditelj, stvaratelj). Teorijski, to su izvori elektromotorne sile (Eng: *ElectroMotor Force*)

Električna energija koju stvara generator u potpunosti se pretvara u neki drugi vid energije. Zbog jednostavnosti u razmatranju, neka je jedini potrošač energije dielektrik koji je upravo veza između elektroda kondenzatora. Tada se jednostavnim simbolima može predstaviti prosto zatvoreno strujno kolo.

U narednim izlaganjima biće pokazano da kondenzator u kolu jednosmerne struje zapravo predstavlja prekid i da struja protiče kroz kondenzator samo u prelaznom režimu, tj. samo dok se kondenzator puni ili prazni.

4 - Prosto strujno kolo

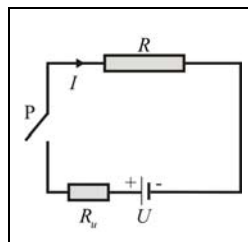
Iz simbola za ravan kondenzator izvodi se simbol za generator jednosmernog napona kojim treba da se naglasi razlika između katode i anode. Iz provodne veze između obloga kondenzatora sledi simbol za potrošač energije.



Prvi uočeni efekat električne struje je bio zagrevanje provodnika, pa je ovaj termogeni potrošač obeležen simbolom R (N.Lat: *resistentia* - otpornost, odupiranje). U prosto električno kolo je dodat i prekidač (kao što je to ventil u slučaju cevovoda). Simboli za šematsko prikazivanje električnih kola mogu biti i složeniji, posebno kad su u električna kola uključeni različiti generatori ili elementi koji imaju promenljivu otpornost.

Ovi simboli uvek prikazuju koncentrisane električne karakteristike, kao što su otpornost, kapacitivnost ili izvor napona. Međutim, svaki izvor napajanja ima svoju unutrašnju otpornost. U nekim slučajevima unutrašnju otpornost generatora je moguće zanemariti.

Takođe, žičani provodnici koji strujno kolo čine zatvorenim imaju svoju otpornost. Najčešće se unutrašnja otpornost generatora posebno prikazuje, a žičani provodnici se smatraju idealnim ili se njihova otpornost prikazuje koncentrisano tako da u šematskom prikazu ostaju samo koncentrisane otpornosti.



5 - Stacionarno električno polje

Električno polje koje je pokretač nosilaca naelektrisanja, takođe mora biti stalno u vremenu i posledično razlika potencijala mora biti konstantna. Prostor u kome se nosioci naelektrisanja kreću je stacionarno električno polje.

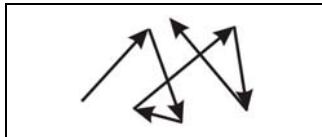
Stacionarna naelektrisanja se razlikuju od statičkih po tome što stalno menjaju svoj položaj u provodnoj sredini, ali im je u posmatranom delu zapremine u svakom trenutku gustina ista. To znači da je električno polje koje stvaraju stacionarna naelektrisanja isto kao i električno polje statičkih naelektrisanja koja su raspoređena na isti način.

Međutim, između elektrostatičkog i stacionarnog električnog polja postoji razlika. U jednom formiranom elektrostatičkom polju se ne vrši nikakav rad. U stacionarnom električnom polju rad se vrši stalno, a utošak energije se nadoknađuje generatorima (izvorima) stalne jednosmerne struje.

6 - Pokretljivost nosilaca naelektrisanja

Kretanje nosilaca naelektrisanja u strujnom polju je veoma složeno. Nosioi naelektrisanja joni (u elektrolitičkim rastvorima) i elektroni (u metalnim provodnicima) se sudaraju sa elementarnim česticama materije, a i međusobno. U daljim izlaganjima biće reči samo o kondukcionalnoj struji i to u provodnicima. Najbolji provodnici električne struje (i toplote) su metali koji po pravilu imaju kristalnu strukturu. U metalima elektroni na spoljašnjim ljuskama su vrlo slabo vezani za matične atome i već na sobnim temperaturama se slobodno kreću kroz kristalnu rešetku koja je obrazovana od nepokretnih atomskih ostataka - jona.

U odsustvu stranog električnog polja, ovo termički izazvano kretanje elektrona je haotično, poput kretanja molekula u nekom rastvoru ili gasu.



Međutim, u malom elementu zapremine, dV , i u kratkom vremenskom intervalu, dt , za mnoštvo elektrona, dq , moguće je definisati makroskopsku srednju brzinu termičkog kretanja, v_T . Utvrđeno je da na sobnoj temperaturi srednja brzina elektrona u metalima iznosi oko 100 km/s.

Kada u provodniku postoji strano električno polje, haotičnom kretanju elektrona se dodaje jedno usmereno i progresivno kretanje.



Elektroni će i pored stalnih sudaranja sa jonima kristalne rešetke ipak stići do izvora polja, tj. do anode. Dakle, opšti pravac struje elektrona je isti kao i pravac stranog električnog polja, ali je smer suprotan.

Između dva sudara elektron se, pod dejstvom stranog električnog polja, kreće ravnomerno ubrzano sa početnom brzinom, $v_1 = v(t=0) = 0$, da bi pri sledećem sudaru imao brzinu $v_2 = v(t=\tau)$.

Neka je srednje vreme između dva sudara τ . Kako je brzina usmerenog kretanja elektrona znatno manja od brzine termičkog kretanja srednje vreme između dva sudara je moguće odrediti kao $\tau = s/v_T$, gde je s srednja vrednost pređenog puta, a v_T srednja brzina termičkog kretanja. Očigledno, ovo vreme zavisi od materijala i temperature provodnika.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E} \\ v_2 &= \int_0^\tau a dt = \frac{e\tau}{m} E\end{aligned}$$

Srednja brzina je $v = (v_1 + v_2)/2$ i direktno je srazmerna jačini stranog električnog polja, gde je koeficijent srazmernosti u pokretljivost elektrona.

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{2m} \vec{E} = u\vec{E}$$

7 - Jačina električne struje - 1

Najvažnija kvantitativna veličina kojom se opisuje električna struja je jačina struje. Iz hidrodinamike je poznato da je jačina toka nestišljivog fluida, u slučaju stacionarnog toka, jednaka odnosu količine proteklog fluida i vremena potrebnog za taj protok. Po analogiji jačina električne struje je odnos protekle količine naelektrisanja i vremena koje je potrebno za taj protok.

U opštem slučaju struja je promenljiva u vremenu pa se za definiciju koristi diferencijalni količnik. Za stacionarna polja to nije neophodno. U elektrolitima struju čine i pozitivni i negativni joni koji se kreću u suprotnim smerovima. Zbog različitog znaka jona jačine jonskih struja se sabiraju.

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

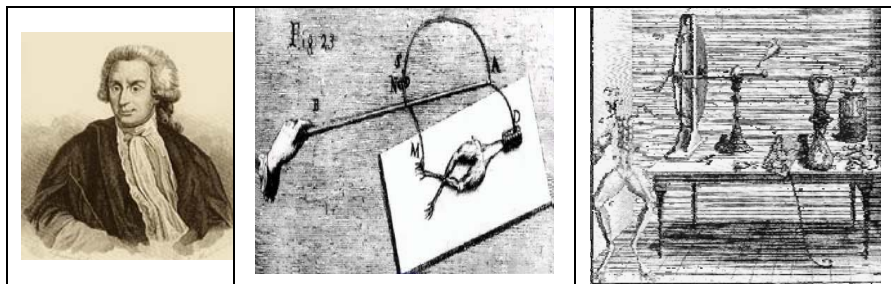
$$I = \frac{q}{t}$$

Jačina struje je skalarna veličina. Međutim kretanje naelektrisanja ima svoj smer čime se definiše i smer struje. Jedinica za jačinu struje je dobila naziv amper sa oznakom A, u čast francuskog fizičara *Amperéa* (*Andre - Marié Amperé*, 1775 - 1836).

$$[I] = \frac{C}{s} = A$$



Instrumenti za merenje jačine struje dobili su naziv ampermetri, a instrumenti koji mere veoma male vrednosti jačina struje su dobili naziv galvanometri prema italijanskom fiziologu *Galvaniju* (*Luigi Galvani*, 1737-1798), čiji su eksperimenti sa propuštanjem slabih struja kroz žablje batake vrlo dobro poznati.



U oba slučaja za merenje se koriste efekti električne struje, a instrumenti moraju biti tako konstruisani da u što manjoj meri poremete struje koje su postojale pre njihovog priključivanja.

Merenje jačine električne struje i potencijala je uvek posredno.

Merenje se zasniva na nekom makroskopskom efektu kao što je mehanički ili hemijski.

8 - Smer električne struje

Znatno pre otkrića elektrona dogovorom je usvojeno da je smer struje isti kao i smer električnog polja ili kretanja pozitivnih jona. Ovakav dogovor je usvojen, jer se prema teoriji električnog fluida smatralo da fluid uvek ide sa mesta na višem potencijalu ka mestu koje je na nižem potencijalu.

Smer struje je
suprotan smeru kretanja elektrona u metalnim provodnicima.

U složenim električnim kolima smer struje najčešće nije moguće unapred odrediti. Zbog toga se u nekim ili svim granama električnog kola smer struje pretpostavlja i naziva se referentni smer. Nakon proračuna se pokazuje da je jačina struje u nekim granama električnog kola negativna, što znači da je smer struje suprotan od referentnog tj. pretpostavljenog.

9 - Jačina električne struje - 2

Jačina struje od 1A se dobija kad kroz poprečni presek provodnika u svakoj sekundi protekne $1C \approx 6.24196 \cdot 10^{18}$ elektrona.

Kako je prebrojavanje elektrona (ili jona) praktično nemoguće, za definisanje i merenje jačine struje se koriste propratni efekti, pa je amper bio definisan kao jačina stalne jednosmerne struje koja u vodenom rastvoru srebronitrata ($AgNO_3$) u svakoj sekundi na katodi izdvoji masu srebra od $1.118 \cdot 10^{-3} g$.

Danas se za definiciju ampera koristi magnetni (mehanički) efekat električne struje. U internacionalnom sistemu jedinica, SI, amper je četvrta osnovna jedinica (kilogram, metar, sekund i amper) koja je definisana kao osnovna, a u suštini je izvedena od drugih osnovnih jedinica. Jačina struje je definisana pomoću izvedene jedinice za silu ($N = kg \cdot m/s^2$) i postaje osnovna jedinica u SI.

Amper je ona jačina stacionarne električne struje, koja održavana u dva paralelna provodnika beskonačnih dužina i zanemarljivo malih površina poprečnih preseka, a koji se nalaze na rastojanju od 1m u vakuumu, čini da ovi provodnici dejstvuju jedan na drugog silom od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna po jednom metru dužine provodnika.

10 - Gustina električne struje

Jačina struje je direktno srazmerna broju nosilaca naelektrisanja. Neka je zapreminska gustina elektrona u provodniku N' (koncentracija). Pod uticajem stranog električnog polja kroz poprečni presek provodnika, čija je površina S , stalnom srednjom brzinom v u vremenu dt prođe količina naelektrisanja dq , odakle se dobija izraz za jačinu struje.

$$dq = N' e S v dt \Rightarrow I = \frac{dq}{dt} = N' e v S.$$

Neka kroz bakarni provodnik poprečnog preseka $S = 1 \text{ mm}^2$ protiče struja od $I = 1 \text{ A}$. Eksperimentalno je utvrđeno da je koncentracija slobodnih elektrona u bakru $N' = 8.5 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3}$. Tako se dobija da je srednja makroskopska brzina elektrona $v = 7.35 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$, što je znatno manje od srednje brzine termičkog kretanja, pa je zanemarivanje učinjeno pri određivanju srednjeg puta između dva sudara sasvim opravdano.

Ako se jačina struje podeli površinom poprečnog preseka dobija se nova veličina - gustina struje. Jedinica za gustinu struje sledi iz definicije. Prilikom definisanja jačine struje površina poprečnog preseka provodnika je smatrana skalarnom veličinom.

$$J = \frac{I}{S} = N' e v$$

$$[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Međutim, i površina i brzina su vektorske veličine.

Algebarski znak jačine struje je zapravo znak skalarnog proizvoda vektora gustine struje i vektora površine. Jednom usvojeni referentni smer struje određuje smer normale poprečnog preseka i obrnuto, usvojeni smer normale na površinu poprečnog preseka provodnika određuje referentni smer struje koji nije obavezno isti sa smerom koji je dogovorom određen.

$$I = N' e \vec{v} \vec{S}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{S}} = N' e \vec{v}$$

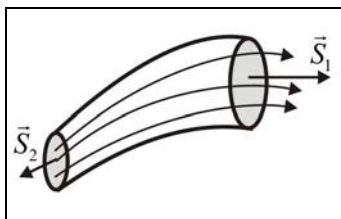
$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$I = \vec{J} \vec{S}$$

U opštem slučaju provodnik nije konstantnog poprečnog preseka i gustina struje duž provodnika nije konstantna i pored toga što je jačina struje u svakom poprečnom preseku ista.

Zbog toga se gustina struje definiše pomoću diferencijalnog količnika. Iz te definicije se uobičajeno izračunava jačina struje.

$$\vec{J} = \frac{dI}{d\vec{S}} \quad I = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$



11 - Jednačina kontinuiteta

Neka se u zapremini V koja je ograničena zatvorenom površinom S nalazi neka količina proizvoljno raspoređenih naelektrisanja q .

$$q = \int_V \rho dV$$

Ova količina naelektrisanja može da se izmeni samo ako kroz graničnu površinu naelektrisanja pristižu u zapreminu ili je napuštaju, obrazujući pritom kondukcione ili konvekcione struje.

Pošto izlazni fluks vektora gustine struje kroz površinu S predstavlja ukupnu struju, to je prema definiciji jačine struje on jednak negativnom priraštaju količine naelektrisanja u vremenu.

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

Ako naelektrisanja napuštaju zapreminu fluks (skalarni proizvod) je pozitivan, a količina naelektrisanja se smanjuje.

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Obrnuto, ako naelektrisanja pristižu u zapreminu fluks je negativan, a priraštaj naelektrisanja je pozitivan.

Kad operacije diferenciranja po vremenu i integriranja po zapremini, kao nezavisne, zamene mesta dobija se jednačina kontinuiteta naelektrisanja.

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Kad se primeni teorema *Gauss-Ostrogradskyog* sledi diferencijalni oblik jednačine kontinuiteta naelektrisanja.

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Poslednje dve jednačine su samo matematički zapis zakona o konzervaciji naelektrisanja.

Zbir svih naelektrisanja u kosmosu je nepromenljiv.

U stacionarnom strujnom polju raspored naelektrisanja mora da bude stacionaran. To znači da na mesto naelektrisanja koja napuštaju zapreminu dolazi ista količina novih naelektrisanja, i obrnuto naelektrisanja koja pristižu u zapreminu potiskuju iz nje istu količinu naelektrisanja.

Drugim rečima, zapreminska gustina naelektrisanja je u vremenu nepromenljiva i izvodi po vremenu su jednaki nuli. Dakle, stacionarno strujno polje je bezizvorno. Strujnice polja su zatvorene krive. Naelektrisanja se kreću poput nestišljive tečnosti.

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0$$

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

12 - Jednačina kontinuiteta i merenje jačine struje

Primena jednačine kontinuiteta naelektrisanja u integralnom obliku na jedan provodnik (strujnu tubu) u kome je uspostavljeno stacionarno polje dovodi do sledećeg razmatranja. Formira se zatvorena površina koja se sastoji od površina poprečnih preseka, S_1 i S_2 , koje su u opštem slučaju različite, i površine omotača S_{om} . Ukupni fluks vektora gustine struje $\vec{J}$ kroz ovu površinu je jednak zbiru flukseva kroz sve navedene delove površine.

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_{om}} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} = 0$$

Fluks kroz površinu omotača je jednak nuli. Matematički gledano, vektor normale površine omotača i vektor gustine struje grade prav ugao, pa je skalarni proizvod ova dva vektora jednak nuli. Međutim, fizički smisao je da naelektrisanja ne napuštaju provodnik i gustina struje van provodnika je jednaka nuli. Na površinama poprečnih preseka vektori normala površina i gustine struje su istog pravca. U odnosu na bilo koji usvojeni smer struje skalarni proizvodi su suprotnih znakova, pa se ta dva sabirka anuliraju. Odavde sledi da je ukupni fluks vektora jačine struje kroz ovakvu zatvorenu površinu jednak nuli.

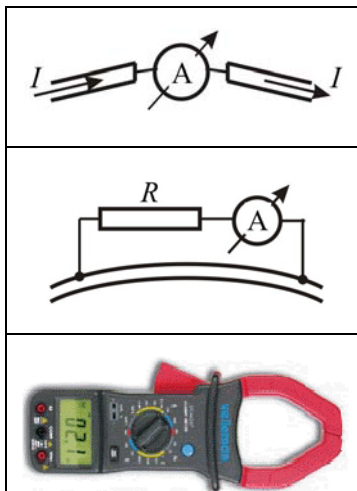
Posledično, to znači da su jačine struja u dva posmatrana preseka jednake bez obzira na površine poprečnih preseka.

$$I_1 = - \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} = I_2$$

U svakom poprečnom preseku provodnika jačina struje je ista.

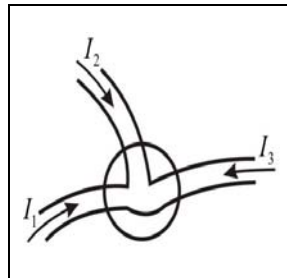
Ovo razmatranje upućuje na način merenja jačine električne struje. Granu električnog kola treba prekinuti, a na mestima prekida ubaciti ampermetar.

Merenje jačine struje prekidanjem strujnog kola je samo od teorijskog značaja. U praksi se merenje jačine struje vrši posredno, bez prekidanja električnog kola, tako što se provodnik obuhvati instrumentom koji se naziva "strujna klešta".



13 - Prvi Kirchhoffov zakon

Kada su struje kanalisane provodnicima posmatraju se čvorovi u kojima se spajaju tri ili više provodnika. Formira se zamišljena zatvorena površina koja obuhvata posmatrani čvor. Pošto je vektor gustine struje van provodnika jednak nuli, ukupni izlazni fluks je jednak zbiru parcijalnih flukseva kroz površine poprečnih preseka svih provodnika.



$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} d\vec{S}$$

Pozitivne normale na površinama poprečnih preseka su kolinearne sa spoljašnjom normalom zatvorene površine i sa referentnim smerovima struja koje sve utiču u čvor. Tako se dobija

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

što je poznato kao prvi Kirchhoffov zakon. Oдавde je jasno da bar jedna od struja koja utiče u čvor ima stvarni smer suprotan od referentnog. Na primer,

$$I_3 = I_1 + I_2.$$



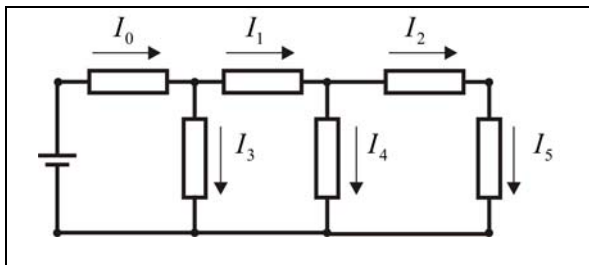
Gustav Kirchhoff,
1824-1887

U opštem slučaju u jednom čvoru se susiće n provodnika.

Algebarski zbir jačina svih struja u čvoru električne mreže je jednak nuli.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

14 – Primer složenog električnog kola



$$I_0 = I_1 + I_3$$

$$I_1 = I_2 + I_4$$

$$I_2 = I_5$$

$$I_0 = I_5 + I_4 + I_3$$

15 - Ohmov zakon

Iz prethodno izvedenih izraza za gustinu struje i srednju brzinu usmerenog kretanja elektrona, sledi da je gustina struje direktno proporcionalna jačini električnog polja. Koeficijent srazmernosti σ je specifična provodnost koja osim od materijala (koncentracije slobodnih elektrona) zavisi još samo od temperature (brzine termičkog kretanja).

Tako se za gustinu struje dobija konačan izraz, koji je zapravo *Ohmov zakon* u lokalnom ili diferencijalnom obliku.

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{e\tau}{2m} \vec{E} = u \vec{E}$$

$$\sigma = \rho u = \frac{N' e^2 s}{2m v_T}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

U stacionarnom strujnom polju, u kome je struja kanalisana tankim i homogenim provodnikom stalnog poprečnog preseka, treba uočiti deo provodnika ograničenog sa dva poprečna preseka na rastojanju l između kojih postoji napon U . Tada je jačina struje u provodniku

$$I = J S = \sigma E S = \sigma \frac{S}{l} U = G U,$$

gde je koeficijent srazmernosti G električna provodnost. Recipročna vrednost provodnosti je otpornost, $R = 1/G$.

Tako se dobija *Ohmov zakon* u integralnom obliku i jedinice za otpornost om i provodnost simens.

$$R = \frac{U}{I}, \quad G = \frac{I}{U}$$



Georg Simon Ohm, 1787-1854

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega,$$

$$[G] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{A}{V} = S.$$

Ranija jedinica za provodnost je bila Mho (unazad čitano Ohm) i imala je oznaku $\mathfrak{M}$.



Ernst Werner von Siemens, 1816-1892

Recipročna vrednost specifične provodnosti je specifična otpornost sa oznakom, ρ , ali ovaj simbol ne treba mešati sa zapreminskom gustinom naelektrisanja. Iz definicije slede i jedinice za specifičnu provodnost i specifičnu otpornost.

$$[\sigma] = S/m$$

$$[\rho] = \left[\frac{1}{\sigma} \right] = \Omega m$$

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

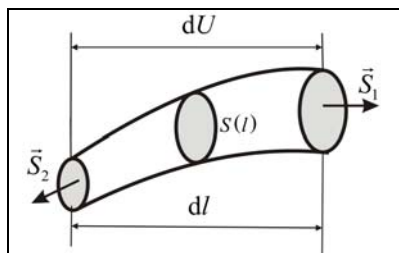
16 - Izračunavanje otpornosti

Integralni oblik *Ohmovog* zakona je rezultat eksperimentalnih istraživanja, dok je diferencijalni oblik istog zakona izveden na osnovu teorijskih istraživanja. Oba oblika su skladna kad se otpornost izračunava za tanak i homogen provodnik konstantnog poprečnog preseka. Međutim, u opštem slučaju specifična otpornost i poprečni presek posmatranog dela zapremine, kroz koji protiču stacionarne struje, mogu da budu promenljive veličine.

U svakoj tački stacionarnog strujnog polja važi *Ohmov zakon*,

$$\vec{E} = \rho \vec{J}.$$

Između bilo koja dva poprečna preseka, na rastojanju dl postoji stalna potencijalna razlika



$$dU = \vec{E} d\vec{l} = \rho(l) \frac{d\vec{l}}{S(l)} I = I dR.$$

U strujnoj tubi vektori normale poprečnog preseka i vektora tangente strujnice su kolinearni, odakle sledi opšta formula za izračunavanje otpornosti. U specijalnom slučaju, kad su specifična otpornost i poprečni presek stalne veličine, sledi već izvedena formula.

$$dR = \rho(l) \frac{dl}{S(l)}$$

$$R = \int_1^2 \rho(l) \frac{dl}{S(l)}$$

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Materijal	na 20 °C	
	σ [S/m]	α [1/°C]
Bakar	$59.6 \cdot 10^6$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Aluminijum	$37.8 \cdot 10^6$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Konstantan	$2 \cdot 10^6$	$-0.05 \cdot 10^{-3}$
Čista voda	$2 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$
Zemlja	$10^{-4} - 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$

Zavisnost specifične otpornosti od temperature iskazuje se pomoću temperaturnog koeficijenta α , (videti lekciju 20).

Primer

Potrebno je odrediti poluprečnik provodnika načinjenog od aluminijuma tako da ima istu otpornost kao i provodnik od bakra koji ima istu dužinu.

$$\frac{R_{Al}}{R_{Cu}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} \cdot \frac{l/S_{Al}}{l/S_{Cu}} = 1 \quad \Rightarrow \quad d_{Al} = d_{Cu} \sqrt{\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}}}$$

Primer - Linijski razdelnik napona - potencijometar

Otpornik je načinjen od otporne trake dužine L , stalne širine b i debljine c koja linearno raste od vrednosti $c = c_0$ do vrednosti $c = nc_0$. Potrebno je odrediti zavisnost otpornosti od položaja klizača x , $0 \leq x \leq L$. Promena debljine otporne trake se dobija kao jednačina prave kroz dve tačke, pa je površina poprečnog preseka,

$$S(x) = bc(x) = \frac{bc_0}{L}(L + (n-1)x) = \frac{bc_0}{L} f(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Otpornost između klizača i početka trake je

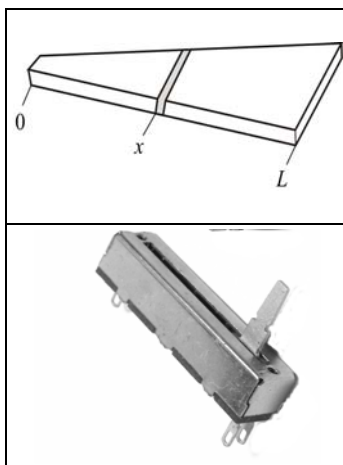
$$R_{0x}(x) = \frac{\rho L}{bc_0} \int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \frac{R_0}{n-1} \ln \left(1 + (n-1) \frac{x}{L} \right)$$

Otpornost između klizača i kraja trake je

$$R_{xL}(x) = \frac{\rho L}{bc_0} \int_x^L \frac{dx}{f(x)} = \frac{R_0}{n-1} \ln \frac{n}{1 + (n-1) \frac{x}{L}}$$

Ukupna otpornost je

$$R_u = R_{0x} + R_{xL} = R_0 \frac{\ln n}{n-1}$$



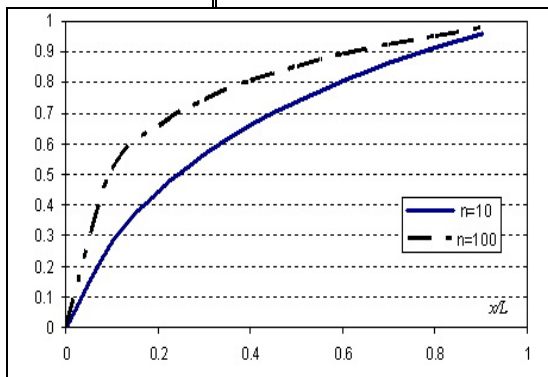
U specijanom slučaju, $n=1$, nema promene u površini poprečnog preseka pa je i otpornost linearna funkcija položaja klizača. Do ovih rezultata se dolazi neposredno iz početnih izraza za površinu poprečnog preseka i bez potrebe za integraljenjem ili posredno iz konačnih izraza za otpornosti kad je potrebno potražiti granične vrednosti tih izraza.

$$R_{0x}(x) = \frac{\rho x}{bc_0} = R_0 \frac{x}{L}$$

$$R_{xL}(x) = R_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$R_u = R_0 \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\ln n}{n-1} = R_0$$

U opštem slučaju površina poprečnog preseka se menja po linearnom zakonu, a otpornost između početne i klizne tačke se menja po logaritamskom zakonu. Takav rezultat zapravo savršeno odgovara ljudskim čulima i zato ima veliku primenu u audio i video uređajima.



Primer - Obrtni razdelnik napona - potenciometar

Kad se otporna traka, širine b , iz prethodnog primera, savije u kružni luk srednjeg poluprečnika a dobija se obrtni potenciometar.

U ovom slučaju klizač se okreće oko ose od početne vrednosti $\theta = \theta_0$ do krajnje vrednosti $\theta = 2\pi - \theta_0$, a debljina trake, c , se dobija kao jednačina prave kroz dve tačke,

$$c(\theta) - c_0 = \frac{nc_0 - c_0}{2\pi - 2\theta_0} (\theta - \theta_0).$$

Površina poprečnog preseka je funkcija ugaone koordinate $S(\theta) = bc(\theta)$,

$$S(\theta) = bc_0 \left(\frac{2\pi - (n+1)\theta_0 + (n-1)\theta}{2\pi - 2\theta_0} \right) = \frac{S_0}{2\pi - 2\theta_0} f(\theta).$$

Dalje, otpornosti između početka otpornika i klizača, odnosno klizača i kraja otpornika su

$$R_1(\theta) = \rho \int_l \frac{dl}{S(l)} = \rho \frac{a}{S_0} (2\pi - 2\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{f(\theta)} = R_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{f(\theta)} = \frac{R_0}{n-1} \ln \frac{f(\theta)}{f(\theta_0)}$$

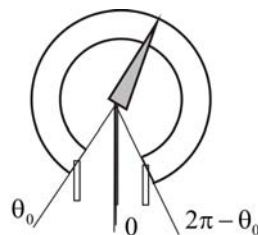
i

$$R_2(\theta) = R_0 \int_{\theta}^{2\pi - \theta_0} \frac{d\theta}{f(\theta)} = \frac{R_0}{n-1} \ln \frac{f(2\pi - \theta_0)}{f(\theta)}.$$

Pri niskim nivoima nadražaja (na primer, jačina zvuka ili osvetljenost) male promene otpornosti treba da proizvedu takve promene jačine struje (napona) koje proizvode osetne promene nadražaja. Obrnuto, što je viši nivo nadražaja čula su sve manje osetljiva na promene, a velike promene otpornosti treba da daju male promene u jačini struje ili napona.

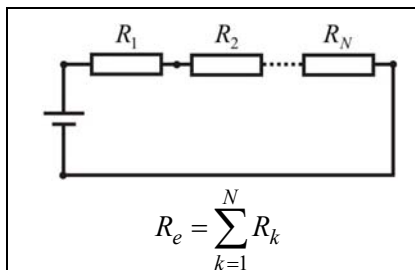
Ukupna otpornost potenciometra je

$$R_1 + R_2 = \frac{R_0}{n-1} \ln \frac{f(2\pi - \theta_0)}{f(\theta_0)}.$$



17 - Ekvivalentne otpornosti

• Redna ili serijska veza. Kroz N različitih otpornika koji su vezani na red protiče struja iste jačine. Prema *Ohmovom* zakonu to je isto kao i da je u električnom kolu vezan samo jedan otpornik čija je otpornost jednaka zbiru svih redno vezanih otpornika.

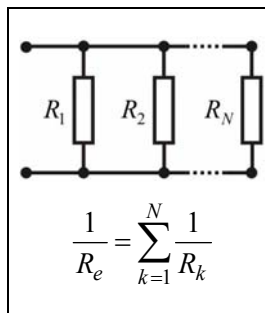


Između priključaka svakog od otpornika napon je raličit, a računa se po *Ohmovom* zakonu. Redna veza otpornika je razdelnik napona.

• Paralelna veza. Kroz N različitih otpornika koji su vezani paralelno protiču različite jačine struja, ali je na krajevima svih otpornika napon isti. Paralelna veza otpornika je razdelnik struja. Prema prvom *Kirchoffovom* zakonu, ukupna jačina struje je jednaka zbiru jačina svih struja koje protiču kroz paralelno spojene otpornike.

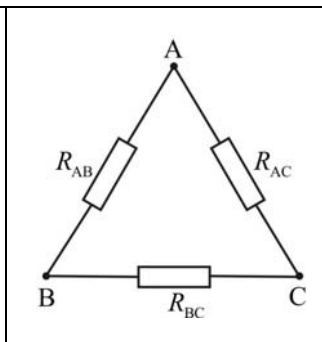
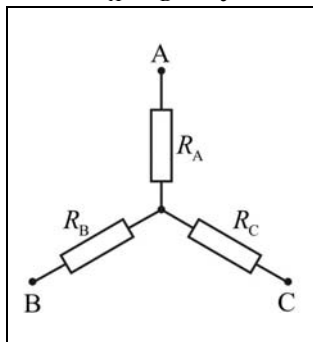
$$I = \sum_{k=1}^N I_k = U \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} = \frac{U}{R_e}$$

Tako se dolazi do izraza za ekvivalentnu otpornost N paralelno vezanih otpornika. Jačina struje kroz svaki od otpornika računa se po *Ohmovom* zakonu. Ekvivalentna otpornost paralelno vezanih otpornika je uvek manja od najveće priključene otpornosti.



Ekvivalentna otpornost dva jednaka paralelno vezana otpornika je jednaka polovini otpornosti jednog od njih.

• Veze u zvezdu i trougao. Često je neophodno deo električne mreže pretvoriti iz oblika zvezde u trougao i obrnuto. Neka su temene tačke zvezde i trougla označene redom sa A , B i C , i neka u te čvorove utiču struje I_A , I_B i I_C , respektivno.



Da bi zvezda i trougao u otpornom smislu bili jednaki neophodno je da naponi između čvorova budu jednaki.

Neka su u zvezdu vezani otpornici R_A , R_B i R_C .

Na primer, prema referentnim smerovima i *Ohmovom* zakonu napon između tačaka A i B je

$$U_{AB} = R_A I_A - R_B I_B ,$$

i mora biti jednak naponu između istih tačaka u trouglu. Neka u trougaonoj vezi kroz otpornike R_{AB} , R_{BC} i R_{CA} protiču struje jačina I_{AB} , I_{BC} i I_{CA} , respektivno.

Pošto u konturi koja spaja čvorove nema izvora napona, zbir svih napona mora biti jednak nuli, ili

$$R_{AB} I_{AB} + R_{BC} I_{BC} + R_{CA} I_{CA} = 0 .$$

Prema usvojenim referentnim smerovima i prvom *Kirchoffovom* zakonu je

$$I_{BC} = I_B + I_{AB} , \quad I_{CA} = -I_A + I_{AB}$$

Zamenom ovih vrednosti u prethodnu jednačinu određuje se jačina struje kroz otpornik R_{AB} , a samim tim i napon između tačaka A i B ,

$$U_{AB} = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} I_A - \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} I_B$$

Izjednačavanjem izraza za napone u zvezdi i trouglu slede veze za dve ekvivalentne otpornosti. Treća ekvivalentna otpornost se dobija ako se isti postupak primeni na neka druga dva čvora. Inverzne formule za transformaciju otporničke zvezde u trougao se elementarnim postupkom dobijaju iz prethodno izvedenih.

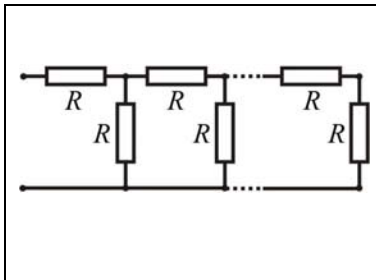
Zvezda iz trougla	Trougao iz zvezde
$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$	$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$
$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$	$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$
$R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$	$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}$
U posebnom slučaju kad su sve otpornosti u trouglu jednake $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = R$ $R_A = R_B = R_C = R/3$	U posebnom slučaju kad su sve otpornosti u zvezdi jednake $R_A = R_B = R_C = R$ $R_{AB} = R_{BC} = R_{CA} = 3R$

Mešovite veze otpornika se rešavaju uzastopnim primenama izvedenih formula sve dok se mešovita veza ne svede na jednu ekvivalentnu otpornost.

Primer - Beskonačna otpornička kaskada

Ekvivalentna otpornost otporničke kaskade, u kojoj su sve otpornosti iste, i koja se sastoji od dve jednake ćelije se dobija tako što se sa primenom formula krene od kraja kaskade. Tako se dobija da je ekvivalentna otpornost

$$R_{2e} = \frac{5}{3} R.$$



Na isti način, za kaskadu od tri, četiri i pet ćelija se dobija

$$R_{3e} = \frac{13}{8} R = 1.61538, \quad R_{4e} = \frac{34}{21} R = 1.61904 \quad \text{i} \quad R_{5e} = \frac{89}{55} R = 1.61818.$$

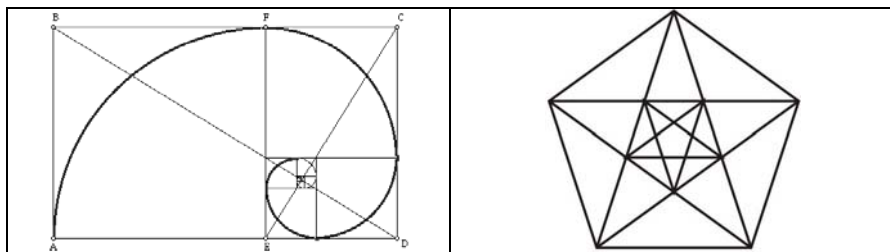
Povećavanjem broja ćelija proručun ekvivalentne otpornosti postaje sve obimniji. Zato, u nekim slučajevima proračuna električnih kola, treba primeniti i neka druga znanja. Na ovom primeru treba uočiti da su ekvivalentne otpornosti količnici dva susedna člana *Fibonaccijevog* niza (*Leonardo Pisano*, 1175-1240 ?, poznat kao sin Bonačijev - *filius Bonacci* - *Fibonacci*), u kome se svaki naredni član dobija kao zbir prethodna dva, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Tako je moguće odrediti ekvivalentnu otpornost za bilo koji broj ćelija (čak i beskonačan) u otporničkoj kaskadi. Očigledno je da, za veliki (beskonačni) broj ćelija koje su vezane u otporničku kaskadu, jedna ćelija više ili manje neće bitno promeniti ekvivalentnu otpornost.

To znači da je ekvivalentnu otpornost cele kaskade moguće zameniti paralelnom vezom jedne ćelije i ekvivalentnom otpornošću ostatka kaskade koja ja ista kao i za celu kaskadu. Pozitivno rešenje dobijene kvadratne jednačine dovodi do konačnog rezultata za ekvivalentnu otpornost beskonačne otporničke kaskade.

$$R_{e\infty} = R \frac{R + 2R_{e\infty}}{R + R_{e\infty}}$$

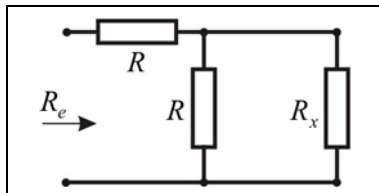
$$R_{e\infty} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R$$

Koeficijent u izrazu za ekvivalentnu otpornost beskonačne otporničke kaskade, $R_{e\infty} = \phi R$, je *Fi*, poznati zlatni broj $\phi = 1.61803398$.



Primer – Zlatni broj

Potrebno je odrediti vrednost otpornosti R_x tako da ekvivalentna otpornost bude jednaka baš otpornosti R_x .

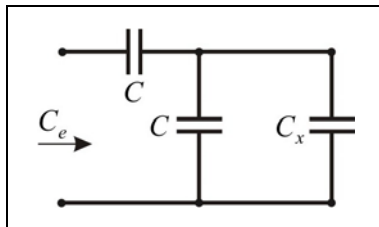


$$R_e = R + \frac{R R_x}{R + R_x} = \frac{R(R + R_x) + R R_x}{R + R_x}$$

Iz uslova da je $R_e = R_x$ sledi kvadratna jednačina čije je pozitivno rešenje

$$R_x = \frac{R + R\sqrt{5}}{2} \text{ ili } R_x = \phi R, \text{ gde je } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

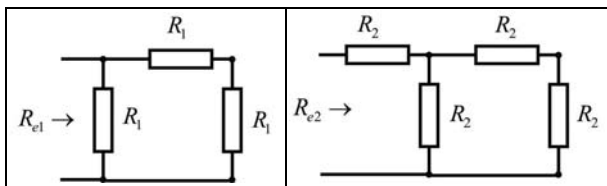
Na isti način se rešava problem određivanja nepoznate kapacitivnosti C_x koja treba da bude jednaka ekvivalentnoj kapacitivnosti, $C_e = C_x$.



$$C_x = (\phi - 1)C$$

Primer – Jednake ekvivalentne otpornosti

Za dva prikazana električna kola treba odrediti vezu između otpornosti tako da im ekvivalentne otpornosti budu jednake.



$$R_{e1} = \frac{2}{3} R_1 \quad R_1 = \frac{5}{2} R_2$$

$$R_{e2} = \frac{5}{3} R_2$$

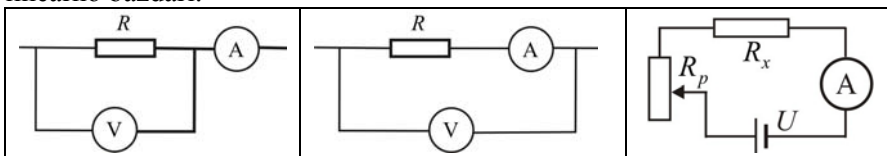
Primer – Povećanje mernog opsega ampermetra

Najveća jačina struje koju može da izmeri ampermetar unutrašnje otpornosti R_a je I_a . Kolika je otpornost R_d koja se paralelno vezuje ampermetru da bi merni opseg bio n puta veći?

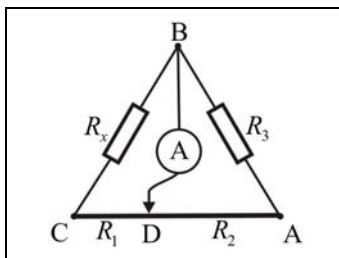
$$I_a + I_d = n I_a, \quad I_d = (n - 1) I_a, \quad I_d R_d = I_a R_a, \quad R_d = R_a / (n - 1).$$

18 - Merenje otpornosti

Otpornost se meri posredno merenjem napona na krajevima otpornika i struje koja protiče kroz otpornik. Time se unosi sistemska greška zbog postojanja unutrašnjih otpornosti ampermetra i voltmetra. Najčeće su oba instrumenta spojena u jedan koji se zove se ommetar. Pomoću promenljivog otpornika R_p podešava se maksimalni otklon ampermetra (kratak spoj između priključaka, $R_x = 0$) a zatim se skala ampermetra linearno baždari.



Za merenja otpornosti koriste se i električni mostovi od kojih je najjednostavniji *Wheatstone* (*Charles Wheatstone*, 1802-1875) most. Međutim, ovaj most nije pronašao *Wheatstone* već *Samuel Hunter* (*Samuel Hunter Christie*, 1784-1865). Nažalost to nije usamljen slučaj u nauci.



U opštem slučaju kroz sve grane električnog kola, koje je nazvano most, protiču struje. Međutim, samo u jednom slučaju kroz granu koja sadrži ampermetar, tj preko mosta, ne protiče struja. Tada je most u ravnoteži, što znači da su čvorovi B i D na istom potencijalu.

Čvor C je zajednički za otpornike R_1 i R_x , što znači da su na njima naponi jednaki. Čvor A je zajednički za otpornike R_2 i R_3 , što znači da su naponi na tim otpornicima jednaki. Između čvorova B i D ne protiče struja, što znači da ista jačina struje, I_1 , protiče kroz otpornike R_x i R_3 , a ista jačina struje, I_2 , kroz otpornike R_1 i R_2 .

$$U_{BD} = 0$$

$$U_{BC} = U_{DC}$$

$$U_{AB} = U_{AD}$$

$$I_1 R_x = I_2 R_1$$

$$I_1 R_3 = I_2 R_2$$

Kad se primeni *Ohmov* zakon na dve paralelne grane ovog električnog kola, i kad se dobijene jednačine podele, sledi konačan izraz za nepoznatu otpornost.

$$R_x = R_1 \frac{R_3}{R_2}$$

U praktičnoj primeni otpornici R_1 i R_2 su načinjeni kao jedan kontinualni otpornik, sa klizećim kontaktom za vezu sa ampermetrom. Tada je odnos otpornosti jednak odnosu dužina ili broja navojaka neke otporne žice pored koje se nalazi skala baždarena u omima.

19 - Jouleov zakon

U provodnicima nosioci naelektrisanja su elektroni, pa je ukupno naelektrisanje q u elementu zapremine dV određeno koncentracijom elektrona. Sile električnog polja, pomerajući naelektrisanja vrše rad.

$$q = N'e dV$$

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = q \vec{E} \vec{v} dt$$

U provodnicima, zbog stalnih sudara elektrona sa jonima kristalne rešetke, celokupan rad se pretvara u toplotu.

Zagrevanje provodnika usled proticanja električne struje je poznat *Jouleov* gubitak ili *Jouleov* efekat. *Joul* je bio engleski fizičar koji je proučavao oslobađanje toplote u provodnicima kroz koje protiče električna struja. Ta proučavanja su uobličena kroz poznati *Jouleov* zakon ili efekat. Snaga *Jouleovih* gubitaka po elementu zapremine je

$$dP = \frac{dA}{dt} = N' e \vec{v} \cdot \vec{E} dV = \vec{J} \cdot \vec{E} dV.$$



James Joule,
1818-1890

Tako se dobija *Jouleov* zakon u lokalnom ili diferencijalnom obliku.

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Protok nosilaca naelektrisanja kroz provodnik uslovljen je postojanjem električnog polja, tj. postojanjem potencijalne razlike između dva poprečna preseka provodnika.

U homogenom provodniku konačnih dimenzija ukupna snaga Džulovih gubitaka je

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_S \vec{J} d\vec{S} \int_l \vec{E} d\vec{l} = IU.$$

Tako se dolazi do *Jouleovog* zakona u integralnom obliku, onako kako ga je predstavio sam *Joule*.

$$P = IU$$

U slučaju stacionarnih struja koje su kanalisane kroz provodnike i diferencijalni oblik *Jouleovog* zakona dobija jednostavnije oblike.

$$\frac{dP}{dV} = \rho J^2 = \sigma E^2$$

Jedinica za snagu je džul po sekundi ili vat, sa oznakom W , u čast škotskog fizičara i inženjera, koji je poznat po parnoj mašini (*James Watt*, 1736-1819). Iz *Jouleovog* zakona sledi i ekvivalentna jedinica za snagu, tj. amper-volt.

$$[P] = W = \frac{J}{s}$$

$$J = W s$$

$$W = A V$$

U elektroprivredi se za električni rad upotrebljava jedinica kWh.

Kad se uz *Jouleov* zakon doda i *Ohmov* zakon slede formule koje se najčešće upotrebljavaju za proračun snage, napona i jačine struje u provodnicima.

Snaga	Jačina struje	Otpornost	Napon
$P = I^2 R$	$I = \sqrt{P/R}$	$R = P/I^2$	$U = P/I$
$P = IU$	$I = P/U$	$R = U^2/P$	$U = \sqrt{PR}$
$P = U^2/R$	$I = U/R$	$R = U/I$	$U = IR$

20 - Temperaturna zavisnost otpornosti

Zagrevanje provodnika ima najveći uticaj na promenu specifične otpornosti provodnika. Porastom temperature povećava se brzina termičkog kretanja i učestalost sudara elektrona sa jonskom rešetkom. Samo neke legure kao što su manganin (Mg – 12%, Ni – 4%, Cu – 84%) ili konstantan (Ni – 40%, Cu – 60%) imaju skoro konstantnu specifičnu otpornost, i to samo u temperaturnom opsegu od 0 °C do 100 °C.

Promena specifične otpornosti $\rho(T)$ sa porastom temperature može se predstaviti redom

$$\rho(T) = \rho(T_1) [1 + \alpha(T - T_1) + \beta(T - T_1)^2 + \gamma(T - T_1)^3 + \dots]$$

Temperatura T_1 je ona temperatura na kojoj je poznata specifična otpornost. Za uzan temperaturni opseg se obično koristi sobna temperatura (20 °C ili češće 23 °C). Temperaturni koeficijenti $\alpha, \beta, \dots$ se za svaki provodnik utvrđuju eksperimentalno, a vrednost im vrlo brzo opada.

U praktičnoj primeni se koristi samo prvi član reda, pa je zavisnost linearna.

$$\rho(T) = \rho(T_1)(1 + \alpha(T - T_1))$$

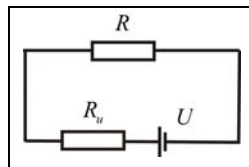
Interesantno je da neki materijali, kao što je na primer legura konstantan, imaju negativan prvi temperaturni koeficijent, što znači da im sa porastom temperature specifična otpornost opada. Ova legura se inače koristi za proizvodnju grejnih tela.

U blizini apsolutne nule zavisnost nije linearna i u proračun se uključuju i viši članovi reda. Kod nekih metala, kao što su vanadijum, kalaj i olovo, specifična otpornost u blizini apsolutne nule naglo pada na zanemarljivu vrednost. Ova pojava se naziva superprovodnost. U električnom kolu, načinjenom od olova, u blizini apsolutne nule, jednom uspostavljena struja može da se održi satima bez izvora napajanja.

21 - Snaga potrošača i izvora napajanja

Kao što instrumenti za merenje jačine struje ili napona imaju svoju unutrašnju otpornost, tako i izvori jednosmernog napona imaju svoju unutrašnju otpornost, koja kao i kod instrumenata treba da bude poznata. Instrumenti, zbog unutrašnje otpornosti, vezivanjem u električno kolo u merenje unose sistemsku grešku. Nasuprot tome, napon izvora napajanja je poznat na krajevima izvora, pri čemu je već uključena unutrašnja otpornost, R_u . Znači da je napon koji daje izvor isti kao i napon na potrošaču. Potrošač je, za sada, termogena otpornost, R , gde se celokupan rad pretvara u *Jouleove* gubitke. Međutim, u ovom slučaju, gubici ili nekorisna snaga se razvijaju na unutrašnjoj otpornosti izvora napajanja, a korisna snaga se razvija na potrošaču ili prijemniku.

U električnom kolu koje se sastoji od izvora napajanja napona U i unutrašnje otpornosti R_u , i potrošača otpornosti R , protiče stacionarna struja jačine I , koja se određuje pomoću Omovog zakona.



Ukupna snaga, P , koju daje izvor napajanja određuje se pomoću Džulovog zakona. Snaga na potrošaču je određena otpornošću i jačinom struje kroz potrošač. Iz tako izvedenog izraza za snagu koja se razvija na potrošaču slede dva razmatranja.

♦ Odnos korisne snage i ukupne snage definiše stepen korisnog dejstva η . Što veći stepen korisnog dejstva je od bitnog značaja za elektroenergetske sisteme pa se teži da otpornost potrošača bude što manja.

♦ U elektronici, gde se radi sa malim snagama, postavlja se uslov da se što veća snaga preda potrošaču. Snaga na potrošaču je jednaka nuli za $R = 0$ i $R \rightarrow \infty$. Prema *Rolle (Michel Rolle, 1652-1719)* teoremi između dve nule neprekidne funkcije postoji ekstremna vrednost, koja se određuje izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom. Tako se dobija da unutrašnja otpornost izvora napona i otpornost potrošača treba da budu jednake, $R = R_u$.

Ovaj uslov se naziva uslov prilagođavanja po snazi.

$$I = \frac{U}{R + R_u}$$

$$P = \frac{U^2}{R + R_u}$$

$$P_R = R \frac{U^2}{(R + R_u)^2}$$

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{R}{R + R_u}$$

$$\frac{dP_R}{dR} = 0$$

$$R = R_u$$

$$P_{R_{MAX}} = \frac{U^2}{4R}$$

$$\eta|_{R=R_u} = 0.5$$

22 - Elektromotorna sila

Kao što je već rečeno za održavanje stacionarne struje u jednoj ili više grana električnog kola moraju postojati izvori jednosmernog napona, čijim radom se održava stacionarno stanje. Rad izvora vrše sile koje mogu biti električnog porekla, ali i neelektričnog porekla (hemijskog, biološkog, foto porekla ili kretanje naelektrisanih tela). U svim slučajevima radi se o stranim ili eksternim silama koje imaju zajedničku osobinu da deluju na slobodne nosioce naelektrisanja, kao što bi to činilo neko strano tj. eksterno električno polje.

Tako se dolazi do uopštenja *Ohm*vog zakona u lokalnom ili diferencijalnom obliku.

$$\vec{E} + \vec{E}_e = \rho \vec{J}$$

Za dve tačke p i q na linijskom provodniku koje je deo električnog kola i u kome postoji izvor napajanja je

$$\int_p^q \vec{E} d\vec{l} + \int_p^q \vec{E}_e d\vec{l} = \int_p^q \rho \vec{J} d\vec{l} = I \int_p^q \rho \frac{dl}{S} = I R_{pq}.$$

Prvi sabirak je razlika potencijala između posmatranih tačaka. Drugi sabirak je elektromotorna sila, $\mathcal{E}_{pq}$, koja deluje između istih tačaka.

Tako je prethodni izraz moguće zapisati u formi uopštenog oblika *Ohm*ovog zakona u integralnom obliku.

$$U_{pq} + \mathcal{E}_{pq} = I R_{pq}$$

Elektromotorna sila ima prirodu napona i jednaka je potencijalnoj razlici između pozitivnog i negativnog priključka izvora napajanja. Međutim, to je usmerena veličina koja je orijentisana kroz izvor napajanja od negativnog ka pozitivnom kraju izvora, što odgovara smeru stranog električnog polja.

Ova razmatranja, kao što će biti odmah pokazano, dovode do drugog *Kirchoff*ovog zakona.

Prvi <i>Kirchoff</i> ov zakon	Drugi <i>Kirchoff</i> ov zakon
$\sum_{k=1}^n I_k = 0$	$\sum_{k=1}^n U_k = 0$

23 - Drugi *Kirchoffov* zakon

Prethodno razmatranje se može primeniti i na zatvorenu konturu koja predstavlja najprostije električno kolo. Kako je u stacionarnom režimu cirkulacija vektora električnog polja jednaka nuli, to je i zbir napona jednak nuli i odatle sledi drugi *Kirchoffov* zakon.

$$U_{pq} + \mathcal{E}_{pq} = I R_{pq}$$

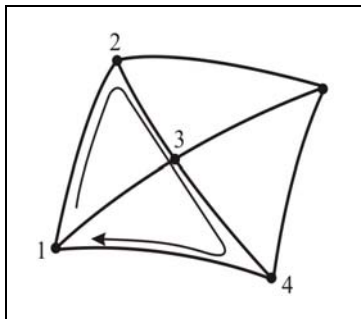
$$U_{pq} = 0$$

$$\mathcal{E} = I R$$

U matematičkom zapisu ovog zakona $\mathcal{E}$ je zbir svih elektromotornih sila u električnom kolu, a R ukupna otpornost električnog kola. Formalni zapis ovog zakona se ne razlikuje od *Ohmovog* zakona. Međutim, postoji suštinska razlika jer u drugom *Kirchoffovom* zakonu učestvuju sile neelektričnog porekla, čije dejstvo na slobodne nosioce naelektrisanja održava stacionarni režim u električnom kolu.

Za bilo kakvo složeno električno kolo u kome deluje veći broj elektromotornih sila treba uočiti neku zatvorenu konturu. Za svaki deo konture između dva čvora može se primeniti drugi *Kirchoffov* zakon. Kad se sve jednačine sabere sledi

$$\sum_{i,j}^n U_{ij} + \sum_{i,j}^n \mathcal{E}_{ij} = \sum_{i,j}^n I_{ij} R_{ij}.$$



Ako je smer obilaska po konturi isti kao i smer struje u nekoj grani struja se uzima sa pozitivnim znakom i obrnuto. Isto važi i za elektromotorne sile.

Za primer sa slike se dobija

$$\sum_{i,j}^n U_{ij} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4) + (\varphi_4 - \varphi_1) = 0.$$

Definitivno, drugi *Kirchoffov* zakon je moguće iskazati kao što sledi.

U proizvoljnoj zatvorenoj konturi složenog električnog kola zbir svih elektromotornih sila je jednak zbiru padova napona na otpornicima.

$$\sum_{i,j}^n \mathcal{E}_{ij} = \sum_{i,j}^n I_{ij} R_{ij}$$

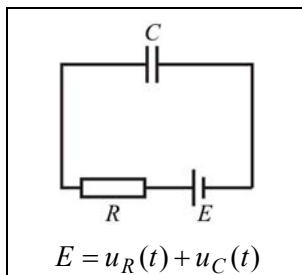
Ohmov zakon, prvi i drugi *Kirchoffov* zakon (osnovni zakoni) su osnova za rešavanje složenih električnih kola. Iz osnovnih zakona razvijen je veći broj metoda za rešavanje električnih kola, kao što je metod konturnih struja, metod potencijala čvorova i td.

24 - Kondenzator u kolu jednosmerne struje - 1

Kondenzator u kolu jednosmerne struje je prekid. Naime, struja postoji samo u prelaznom režimu, tj. u kratkom vremenskom intervalu dok se kondenzator puni ili prazni. Zbog toga će biti razmatrane trenutne vrednosti struje, napona i količine naelektrisanja koje su vremenski zavisne veličine sve do uspostavljanja ravnotežnog stanja.

♦ Punjenje kondenzatora. Po drugom *Kirchoff*ovom zakonu elektromotorna sila je jednaka zbiru padova napona na otporniku i kondenzatoru. Padove napona treba izraziti preko količina naelektrisanja:

$$u_R = i(t)R = R \frac{dq(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} q(t).$$



Tako se dobija nehomogena linearna diferencijalna jednačina prvog reda u kojoj su svi članovi dimenziono jačine struja.

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{E}{R}$$

To znači da proizvod RC mora da predstavlja vreme. Vreme $\tau = RC$ naziva se vremenska konstanta, što postaje još očiglednije kad se diferencijalna jednačina reši.

Do rešenja diferencijalne jednačine može da se dođe ako se jednostavnim pregrupisavanjem članova dovede na oblik koji razdvaja promenljive.

$$\frac{dq(t)}{EC - q(t)} = \frac{1}{RC} dt$$

Integracijom leve i desne strane dobija se traženo rešenje, a ono će sadržati i aditivnu konstantu integracije. Da bi rešenje bilo jednoznačno, potreban je i početni uslov. Zato, neka je u početnom trenutku, $t = 0$, kondenzator bio prazan (neopterećen), tj. $q(0) = 0$. Tako se dolazi do konačnog rešenja.

t	$q(t)$	$u_C(t)$	$i(t)$
t	$q(t) = EC(1 - e^{-t/\tau})$	$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$	$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$
$t = 0$	$q(0) = 0$	$u_C(0) = 0$	$i(0) = \frac{E}{R}$
$t \rightarrow \infty$	$q(\infty) = Q = EC$	$u_C(\infty) = U_C = E$	$i(\infty) = I = 0$
$t = 3\tau$	$q(3\tau) \approx 0.95 \cdot Q$	$u_C(3\tau) \approx 0.95 \cdot E$	$i(3\tau) \approx 0.05 \cdot \frac{E}{R}$

25 - Kondenzator u kolu jednosmerne struje - 2

Iz činjenice da se kondenzator puni po eksponencijalnom zakonu, što znači da u vrlo kratkom vremenskom intervalu napon na kondenzatoru dostiže skoro maksimalnu vrednost, a jačina struje vrlo brzo teži nuli. Ova zakonitost se može iskoristiti za merenje kapacitivnosti. Neka su elektromotorna sila, E , i otpornost, R , poznate veličine.

Merenjem napona na kondenzatoru i vremena koje je potrebno da napon na kondenzatoru dostigne neki deo teorijskog maksimuma, može se odrediti kapacitivnost. Takođe, nepoznatu vrednost kapacitivnosti je moguće odrediti i merenjem jačine struje i vremena potrebnog da jačina struje opadne na neki deo teorijskog maksimuma.

Najčešće se koristi upravo napunjenost kondenzatora od 95%, jer je tada $\ln 0.05 \approx 3$.

$$C = -\frac{t}{R \ln\left(1 - \frac{u_C(t)}{E}\right)}$$

$$C = -\frac{t}{R \ln\left(\frac{R}{E} i(t)\right)}$$

$$C \approx \frac{t}{3R}$$

Na primer, ako je $R = 1 \text{ M}\Omega$ i ako izmereno vreme, potrebno da napon na kondenzatoru dostigne 95% vrednosti elektromotorne sile, E , ili da jačina struje opadne na vrednost 5% od vrednosti maksimalne struje, iznosi $t = 3 \text{ s}$, tada je izračunata kapacitivnost $C = 1 \mu\text{F}$.

♦ Pražnjenje kondenzatora. Prosto električno kolo sadrži kondenzator napunjen količinom naelektrisanja Q i otpornik. U kolu nema izvora elektromotorne sile. Zbir napona na kondenzatoru i na otporniku, od trenutka uspostavljanja kontakta (u prelaznom režimu), je jednak nuli. Kad se naponi izraze preko količina naelektrisanja dobija se homogena diferencijalna jednačina prvog reda. Konstanta integracije određuje se iz početnog uslova $q(0) = Q$, odakle sledi konačno rešenje.

$$u_C(t) + u_R(t) = 0$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} q(t) = 0$$

$$q(t) = Q e^{-t/\tau}$$

Količina naelektrisanja, napon na kondenzatoru i jačina struje pri pražnjenju kondenzatora opadaju po eksponencijalnom zakonu.

26 - Realni i idealni generatori - 1

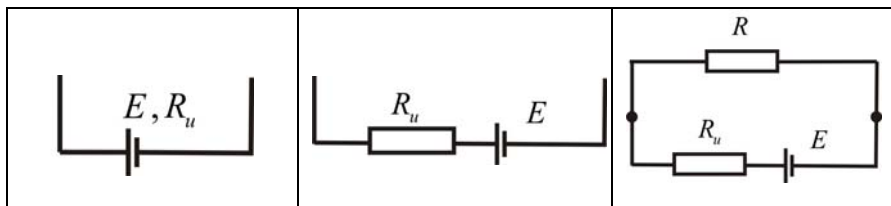
Već je ranije napomenuto da izvori jednosmernog napona nisu savršeni i da imaju svoju unutrašnju otpornost, R_u . Stvarna struja koja protiče kroz prosto kolo je količnik elektromotorne sile, $\varepsilon = E$, i ukupne otpornosti. Odatle se dobijaju izrazi za napon na potrošaču i unutrašnju otpornost izvora. Na osnovu poslednjeg izraza merenjem je moguće odrediti unutrašnju otpornost.

$$I = \frac{E}{R + R_u}$$

$$U = IR = \frac{ER}{R_u + R}$$

$$R_u = \frac{E - IR}{I}$$

Prvo se izmeri napon na priključcima izvora elektromotorne sile kada je izvor neopterećen. To je napon praznog hoda. Zatim se izvor optereti, formiranjem prostog strujnog kola, tj. priključivanjem potrošača otpornosti R . Merenjem jačine struje dobijaju se podaci za proračun unutrašnje otpornosti.



Kad je unutrašnja otpornost izvora elektromotorne sile znatno manja od priključene otpornosti, $R_u \ll R$, stvarni generator je moguće smatrati skoro idealnim. Tada je $U = E$ i $I = U/R$. U realnim uslovima (posebno u elektrotehnici) unutrašnja otpornost generatora može biti znatno veća od otpornosti potrošača, $R_u \gg R$. Tada je jačina struje u prostom električnom kolu skoro nezavisna od otpornosti potrošača i drugih generatora koji se mogu smatrati idealnim.

U ovom slučaju je pogodno uvesti pojam idealnog strujnog generatora, čija je osnovna karakteristika jačina struje I_s koja je konstantna i nezavisna od otpornosti potrošača. Idealni strujni generator se u električnim šemama predstavlja kružićem sa strelicom koja označava smer struje.

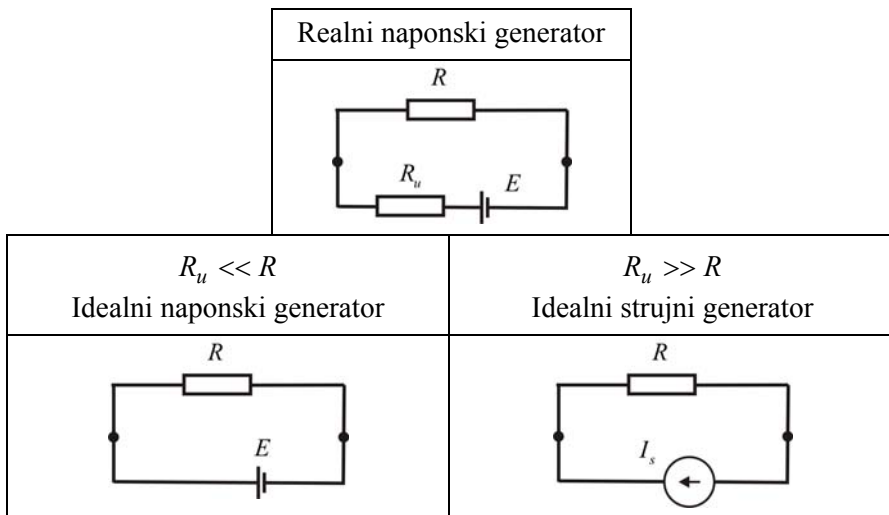
$$I = \frac{E}{R_u} = I_s$$

$$U = I_s R = E \frac{R}{R_u}$$

U slučaju koji teži idealnom, strujnom generatoru se može paralelno dodati otpornik koji predstavlja unutrašnju otpornost. Paralelna veza unutrašnje otpornosti generatora i otpornosti potrošača je vrlo bliska otpornosti potrošača. U graničnom (idealnom) slučaju unutrašnja otpornost generatora teži beskonačnosti, $R_u \rightarrow \infty$, a ekvivalentna otpornost paralelne veze je jednaka otpornosti potrošača.

27 -Realni i idealni generatori - 2

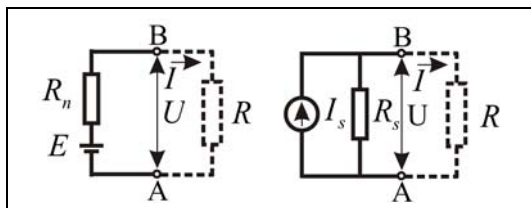
Kad je potrebno iz električne mreže ukloniti izvore stacionarnog električnog polja (obično zbog određivanja ekvivalentne otpornosti mreže) naponski generatori se kratko spajaju, a strujni generatori se uklanjaju. U realnim slučajevima njihove unutrašnje otpornosti ostaju u mreži. U idealnim i skoro idealnim slučajevima unutrašnje otpornosti ne utiču na konfiguraciju mreže i ekvivalentnu otpornost.



U realnim uslovima naponski generator je moguće zameniti ekvivalentnim strujnim generatorom i obrnuto. Teorema ekvivalencije je opšta teorema teorije elektromagnetnih polja koja se u najkraćem svodi na činjenicu da su svi izvori elektromagnetnog polja koji proizvode isto elektromagnetno polje međusobno ekvivalentni. Svedeno na struje i napone u stacionarnom električnom polju to znači da je potrošač uvek u istom režimu bez razlike da li je generator koji ga napaja naponski ili strujni.

$$I = \frac{E}{R + R_n}$$

$$U = \frac{RE}{R + R_n}$$



$$U = \frac{R_s I_s R}{R + R_s}$$

$$I = \frac{R_s I_s}{R + R_s}$$

Kad se izjednače izrazi za jačinu struje kroz potrošač ili izrazi za napon na krajevima potrošača dolazi se do izraza za traženu ekvivalenciju.

Izjednačavanjem brojilaca i imenilaca dolazi se do izraza za konverziju jednog generatora u drugi. Idealne generatore nije moguće konvertovati.

$$\frac{E}{R + R_n} = \frac{R_s I_s}{R + R_s}$$

28 - Rešavanje električnih kola

Linearna električna kola ili mreže u opštem slučaju sadrže linearne otpornike (za koje važi *Ohmov zakon*) i izvore elektromotornih sila čije unutrašnje otpornosti ne zavise od jačine i smera proticanja struje kroz izvor. U najvećem broju slučajeva sve otpornosti i vrednosti elektromotornih sila su poznate, a nepoznate su jačine struja u granama kola. Naravno može biti izuzetaka, ali se prilikom rešavanja električnih kola, u najvećem broju slučajeva, problem se uvek svede na određivanje jačina struja.

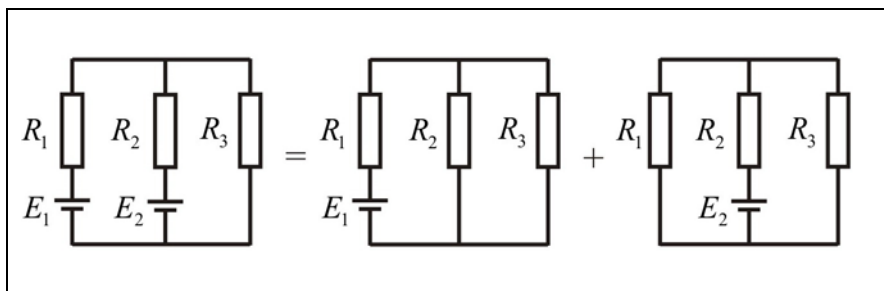
Za rešavanje električnih kola razvijen je veliki broj metoda. Prilikom rešavanja od velike koristi je i primena teorema iz teorije električnih kola. Neke od teorema i metoda su:

Teorema superpozicije	Neposredna primena <i>Ohmovog zakona</i>
Teorema reciprociteta	Neposredna primena <i>Kirchoffovih zakona</i>
<i>Théveneninova</i> teorema	Metod konturnih struja
<i>Nortonova</i> teorema	Metod potencijala čvorova
Teorema kompenzacije	Ostali metodi koji se svode na matrične

29 -Teorema superpozicije

Teorema superpozicije je posledica linearnosti jednačina koje se postavljaju na osnovu *Kirchoffovih zakona*.

Ukupna jačina struje u bilo kojoj grani linearne električne mreže, koju proizvodi proizvoljan broj proizvoljno raspoređenih izvora napona, je jednaka zbiru jačina struja koje bi u toj grani proizvodili ti isti izvori napona kad deluju zasebno.

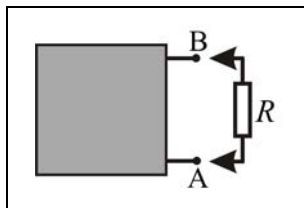


Princip linearne superpozicije važi i u elektrostatiki, ali je to zapravo opšti princip koji važi u teoriji elektromagnetnih polja u linearnim sredinama.

30 - Théveneninova teorema

Teoremu koja sledi prvo je definisao *Helmholtz* još 1853. godine. Pedeset godina kasnije, francuski inženjer telegrafije, *Thévenenin* (*Léon Charles Thévenenin*, 1857-1926) je ponovo došao do iste teoreme koja po njemu i nosi naziv (nije prvi put učinjena nepravda).

Složenu električnu mrežu je moguće podeliti na izolovanu pasivnu granu koja je od interesa i ostatak mreže koji predstavlja aktivnu crnu kutiju. Dalje, crnu kutiju je moguće zameniti izvorom elektromotorne sile koji ima svoju unutrašnju otpornost.



To je *Théveneninov* ekvivalent ili *Théveneninov* generator.

Crna kutija može da bude predstavljena prostim ekvivalentom samo ako je ekvivalentna otpornost crne kutije izračunata ili izmerena, sa dovoljnom tačnošću, kada su svi izvori stacionarnog električnog polja isključeni, a da pri tome sve unutrašnje otpornosti izvora ostaju u proračunu (pri merenju se čini sistemski greška). U slučaju idealnog strujnog generatora unutrašnja otpornost je beskonačna pa se cela grana uklanja iz električnog kola. Na taj način crna kutija postaje pasivna i njena ekvivalentna otpornost gledano sa krajeva izvan kutije je R_T .

Napon na krajevima van kutije, U_T , je napon praznog hoda, tj. napon koji se može izračunati ili izmeriti (opet sa zadovoljavajućom tačnošću) kad je pasivna grana uklonjena. Konačno, izraz za jačinu struje kroz izdvojenu pasivnu granu električne mreže je isti kao i izraz za jačinu struje koju daje realan generator kroz potrošač.

$$U_T = U_{AB} \Big|_{R \rightarrow \infty}$$

$$R_T = R_e \Big|_{\sum U=0}$$

$$I = \frac{U_T}{R_T + R}$$

Théveneninov ekvivalent

U odnosu na bilo koja dva kraja svaku složenu linearnu električnu mrežu, koja sadrži izvore stacionarnog električnog polja i otpornosti, je moguće predstaviti prostim ekvivalentom koji sadrži samo jedan izvor napona i samo jednu redno vezanu otpornost.

31 - Nortonova teorema

Nortonova teorema je proširenje *Théveneninove* teoreme na strujni generator. I u ovom slučaju je učinjena nepravda. Teoremu su nezavisno jedan od drugog prikazali 1926. godine Mayer (*Hans Ferdinand Mayer*, 1896-1980) i Norton (*Edward Lawry Norton*, 1898-1983). Prvi, u okviru istraživanja u *Siemensovim* laboratorijama je rezultate do kojih je došao publikovao, a drugi u okviru istraživanja u *Bellovim* laboratorijama je dao samo interni tehnički izveštaj. I pored toga što se ne radi o nekim spektakularnim rezultatima, jer je konverzija svakog realnog naponskog generatora u strujni generator poznata, teorema je dobila naziv po istraživaču koji je bio poznat po drugim svojim patentima.

Nortonov ekvivalent

U odnosu na bilo koja dva kraja svaku složenu linearnu električnu mrežu, koja sadrži izvore stacionarnog električnog polja i otpornosti, je moguće predstaviti prostim ekvivalentom koji sadrži samo jedan strujni izvor i samo jednu paralelno vezanu otpornost.

Ekvivalentna otpornost posmatrane električne mreže, R_N , je ista kao i kod *Théveneninovog* ekvivalenta, $R_N = R_T$. Ekvivalentna otpornost se dobija računski ili merenjem kad su svi izvori elektromotornih sila i struje strujnih generatora poništeni. Jačina struje *Nortonovog* strujnog generatora je zapravo jačina struje između posmatranih krajeva električne mreže kad su ta dva priključka spojena savršenim provodnikom, tj. kad su u kratkom spoju.

<i>Théveneninov</i> ekvivalent	<i>Nortonov</i> ekvivalent
Napon praznog hoda	Struja kratkog spoja
$U_T = U_{AB} _{R \rightarrow \infty}$	$I_N = I_{AB} _{R \rightarrow 0} = U_T / R_T$

32 -Teorema kompenzacije ili zamene

Ma koji deo složene električne mreže koji je sa ostatkom mreže povezan sa dva priključka moguće je zameniti (kompenzovati) i to:

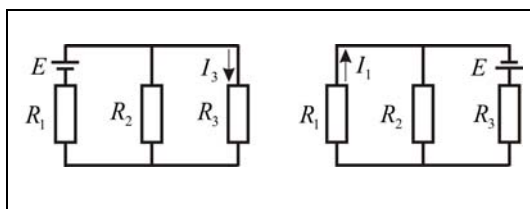
- ♦ idealnim naponskim generatorom čija je elektromotorna sila jednaka naponu između priključaka sa istim referentnim smerom,
- ♦ idealnim strujnim generatorom čija jačina struje je jednaka jačini struje između delova električne mreže sa istim referentnim smerom.

33 -Teorema reciprociteta

Teorema reciprociteta ili teorema uzajamnosti važi za linearne električne mreže koje sadrže samo jedan izvor napona. Ova teorema, kao i teorema superpozicije, je posledica linearnosti osnovnih jednačina električnih mreža i važi u opštoj teoriji elektromagnetnih polja u linearnim sredinama.

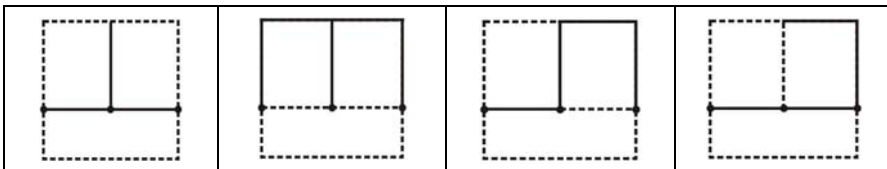
Ako neki izvor napona dejstvuje u jednoj grani pasivne električne mreže i prouzrokuje neku jačinu struje u nekoj drugoj grani te iste mreže, tada taj isti izvor napona premešten u drugu posmatranu granu električne mreže u prvoj posmatranoj grani prouzrokuje struju iste jačine.

Na taj način se za deo električne mreže iz koje se izuzima grana, koja je od interesa, usvaja termin crna kutija koja može biti aktivna ili pasivna..



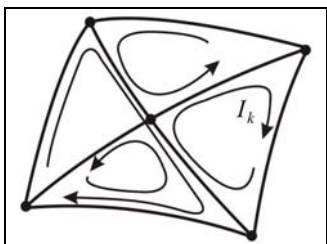
34 -Neposredna primena osnovnih zakona

Ako se složeno električno kolo sastoji od K grana i N čvorova, tada je potrebno postaviti K nezavisnih linearnih jednačina. Na osnovu prvog *Kirchoffovog* zakona se može postaviti $N-1$ jednačina, koje su linearno nezavisne jer su svi čvorovi različiti. To znači da je preostali broj jednačina, $n = K - N + 1$, potrebno postaviti na osnovu drugog *Kirchoffovog* zakona. Međutim, takvih jednačina ima toliko koliko se u složenom kolu može postaviti zatvorenih kontura. Da bi sistem od K linearnih jednačina imao jednoznačno rešenje i te jednačine moraju biti međusobno nezavisne. Zato zatvorene konture treba birati tako da se svaka nova kontura razlikuje od prethodne po jednoj novoj grani električnog kola. Da bi izbor nezavisnih kontura bio olakšan koristi se metod koji je zasnovan na teoriji grafova. Prvo se naznače grane koje povezuju sve čvorove mreže a da pri tome ne obrazuju ni jednu zatvorenu konturu. Jasno u svakoj mreži postoji više mogućih rešenja. Označene grane predstavljaju stablo. Neoznačene grane su spojnice kojih ima tačno onoliko koliko je potrebno formirati jednačina na osnovu drugog *Kirchoffovog* zakona.



35 - Metod konturnih struja

Metod konturnih struja je direktna posledica drugog *Kirchoffovog* zakona, a u odnosu na neposrednu primenu *Kirchoffovih* zakona ima prednost jer se sistem jednačina vrlo jednostavno i na šematizovani način formira. Broj jednačina je jednak broju nezavisnih kontura, tj. broju nepoznatih konturnih struja. Ako složeno električno kolo sadrži strujne generatore tada su jačine struja u tim granama unapred poznate i moraju biti nezavisne grane odgovarajućih nezavisnih kontura kojima pripadaju.



Kako su konturne struje samo zamišljene njihov smer se unapred pretpostavlja kao smer obilaženja po konturi. Prema drugom *Kirchoffovom* zakonu, za svaku nezavisnu konturu zbir padova napona je jednak zbiru elektromotornih sila koje deluju u toj konturi. Tako se dobija sistem jednačina

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & R_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nk} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ \vdots \\ I_k \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum E \right)_I \\ \left(\sum E \right)_{II} \\ \vdots \\ \left(\sum E \right)_k \\ \vdots \\ \left(\sum E \right)_n \end{bmatrix}$$

Koeficijenti u sistemu jednačina sa istim indeksima predstavljaju zbir svih otpornosti koje pripadaju konturi koja je označena tim indeksom, tj. to su zbrovi svih otpornosti kroz koje protiče konturna struja sa tim indeksom pa su nazvani sopstvena otpornost. Koeficijenti sa različitim indeksima ili međusobne otpornosti su zbir svih otpornosti koje su zajedničke za dve indeksirane konture. Ako kroz zajedničku granu dve konture protiču konturne struje suprotnih smerova koeficijenti imaju negativan znak i obrnuto. Slobodni članovi sistema jednačina su zbir svih elektromotornih sila koje pripadaju konturi za koju se jednačina sastavlja.

Nakon rešavanja sistema jednačina određuju se jačine struja u pojedinim granama složenog električnog kola. Jačina struje u nezavisnoj grani je jednaka jačini konturne struje, a jačina struje u grani koja pripada većem broju kontura je jednaka zbiru (uključujući znak) svih konturnih struja koje kroz tu granu električnog kola protiču.

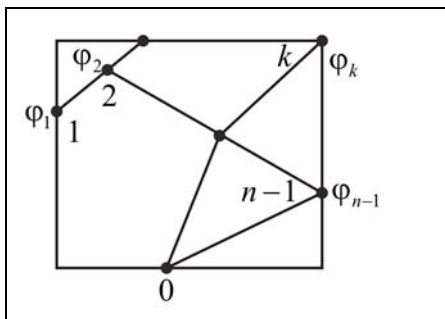
36 - Metod potencijala čvorova

Metod potencijala čvorova je zasnovan na posrednoj primeni *Kirchoff*ovih zakona. U odnosu na direktnu primenu *Kirchoff*ovih zakona daje manji broj jednačina, tj. broj je jednak broju jednačina koje bi trebalo postaviti po prvom Kirchofovom zakonu. U složenoj električnoj mreži prvo treba obeležiti čvorove, a zatim izdvojiti granu i više paralelno vezanih grana između dva čvora. Neka između čvorova i i j postoji samo jedna grana sa proizvoljnim brojem otpornosti (provodnosti) i izvora elektromotorne sile tada je, prema definiciji, napon između posmatranih čvorova

$$U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j = \int_i^j \vec{E} d\vec{l} = I_{ij}R_{ij} - E_{ij},$$

gde je $R_{ij} = R_{ji}$ ukupna otpornost grane električnog kola i $E_{ij} = -E_{ji}$ algebarski zbir svih elektromotornih sila u posmatranoj grani.

Metod će biti objašnjen na primeru topologije električnog kola sa slike.



Ukoliko kolo ne sadrži ni u jednoj grani idealni naponski generator, potrebno je postaviti sistem od $N_x = N_{n-1}$ jednačina, gde je n broj čvorova. Jedan od čvorova se usvaja za referentni i obeležava se 0 i nalazi se na potencijalu $\varphi_0 = 0$.

Ostali čvorovi obeležavaju se brojevima $1, 2, \dots, k, \dots, n-1$ (proizvoljno) i njihovi potencijali u odnosu na referentni su $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_{n-1}$, respektivno.

Sistem jednačina po metodi potencijala čvorova za električno kolo je

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - \dots - G_{1k}\varphi_k - \dots - G_{1,n-1}\varphi_{n-1} &= (\sum J)_1 \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - \dots - G_{2k}\varphi_k - \dots - G_{2,n-1}\varphi_{n-1} &= (\sum J)_2 \\ &\vdots \\ -G_{k1}\varphi_1 - G_{k2}\varphi_2 - \dots + G_{kk}\varphi_k - \dots - G_{k,n-1}\varphi_{n-1} &= (\sum J)_k \\ &\vdots \\ -G_{n-1,1}\varphi_1 - G_{n-1,2}\varphi_2 - \dots - G_{n-1,k}\varphi_k - \dots + G_{n-1,n-1}\varphi_{n-1} &= (\sum J)_{n-1} \end{aligned}$$

Ako iskoristimo činjenicu da za napone između bilo kog čvora i referentnog čvora važi

$$U_{k0} = \varphi_k - \varphi_0 = \varphi_k,$$

sistem jednačina postaje

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1k} & \dots & -G_{1,n-1} \\ -G_{21} & +G_{22} & \dots & -G_{2k} & \dots & -G_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{k1} & -G_{k2} & \dots & +G_{kk} & \dots & -G_{k,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n-1,1} & -G_{n-1,2} & \dots & -G_{n-1,k} & \dots & +G_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{k0} \\ \vdots \\ U_{n-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum J)_1 \\ (\sum J)_2 \\ \vdots \\ (\sum J)_k \\ \vdots \\ (\sum J)_{n-1} \end{bmatrix}$$

Provodnosti ($G_{ij} = 1/R_{ij}$) sa istim indeksima su sopstvene provodnosti, tj. provodnosti koje su priključene u čvor sa zadatim indeksom. Provodnosti sa različitim indeksima su zbir svih provodnosti između dva indeksirana čvora. Samo se sopstvene provodnosti uzimaju sa pozitivnim predznakom, dok su sve ostale sa negativnim predznakom.

$(\sum J)_k$ predstavlja algebarski zbir struja svih strujnih generator vezanih za k -ti čvor. Da bi se dobio ovakav sistem jednačina neophodno je i sve naponske generatore transformisati u strujne. Ukoliko struja utiče u čvor uzima se sa pozitivnim znakom i obrnuto.

Jačina struje u grani koja spaja posmatrane čvorove je

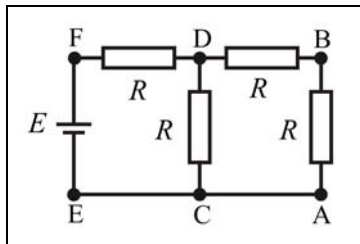
$$\begin{aligned} I_{ij} &= G_{ij}U_{ij} + G_{ij}E_{ij} \\ I_{ij} &= G_{ij}(U_{i0} - U_{j0}) + G_{ij}E_{ij}, \end{aligned}$$

gde je upotrebljena provodnost umesto otpornosti, jer se u slučaju više paralelnih grana između dva čvora ukupne provodnosti i elektromotorne sile dobijaju samo sabiranjem po svim granama. Ako neka od grana sadrži idealni strujni generator, jačine struje, I_S , ovog generatora se dodaje levoj strani prethodne jednačine.

Ukoliko između dva čvora postoji idealni naponski generator, elektromotorne sile, E , tj. ako neka od grana sadrži samo idealni naponski generator bez ikakvih otpornosti, za referentni čvor se uzima čvor za koji je vezan negativni pol generatora. U tom slučaju napon čvora za koji je vezan pozitivni pol generatora dobija vrednost elektromotorne sile generatora, $U_{k0} = E$. Samim tim sistem jednačina se redukuje i ne piše se jednačina za taj čvor.

Primer – Više načina rešavanja električnog kola

Neka je dato električno kolo u kome je zbog jednostavnosti uključen samo jedan izvor elektromotorne sile, E , i kome su sve otpornosti jednake, R . Tačke u kolu (ne i čvorovi) su obeležene po parovima AB , CD i EF . Zadatak je odrediti jačinu struje i napon između tačaka AB .



♦ Neposredna primena osnovnih zakona

U tački (čvoru) C ukupna jačina struje I_1 se grana na struje I_2 i I_3 kroz dve paralelno vezane grane. Kako je potencijalna razlika između tačaka CD i AD ista to sledi da je $I_2 = 2I_3$. Ekvivalentna otpornost gledano iz tačaka u kojima je priključen izvor napona je $R_e = R + R \parallel 2R$. Tako se dobija ukupna jačina struje koja protiče kroz izvor napajanja i ekvivalentnu otpornost.

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_2 = \frac{2}{3} I_1$$

$$I_3 = \frac{1}{3} I_1$$

$$R_e = \frac{5}{3} R$$

$$I_1 = \frac{E}{R_e} = \frac{3}{5} \frac{E}{R}, \quad I_{AB} = I_3 = \frac{1}{5} \frac{E}{R}, \quad U_{AB} = \frac{1}{5} E.$$

Za posmatrano električno kolo moguće je postaviti samo dve nezavisne konture. Neka to budu konture $FECD$ i $DCAB$. Dve nezavisne konture daju sistem od dve linearno nezavisne jednačine se tri nepoznate jačine struja.

$$I_1 R + I_2 R = E$$

$$-I_2 R + I_3 2R = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Treća neophodna jednačina se dobija iz prvog *Kirchoffovog* zakona za čvor C . Dobijeni sistem jednačina je moguće rešiti metodom eliminacije.

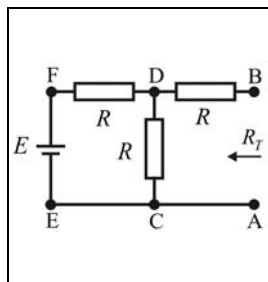
Međutim, za složenija električna kola znatno je pogodnije sistem zapisati u matricnoj formi. Rešavanjem dobijenog sistema jednačina dobijaju se poznati rezultati.

$$\begin{bmatrix} R & R & 0 \\ 0 & -R & 2R \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

♦ *Théveneninova* teorema

Po ovoj teoremi celo električno kolo, osim otpornika između tačaka AB , se zamenjuje crnom kutijom, a ova se zamenjuje ekvivalentnim *Théveneninovim* (naponskim) generatorom.

Ekvivalentna unutrašnja otpornost ovog generatora se dobija kad se posmatrano sa strane para tačaka AB izračuna (ili izmeri) ekvivalentna otpornost kad su svi naponski izvori kratko spojeni, kad su svi strujni izvori uklonjeni i kad su krajevi AB otvoreni (otpornik uklonjen). Ekvivalentni napon se izračunava (meri) kad su krajevi AB otvoreni (napon praznog hoda). Tako je



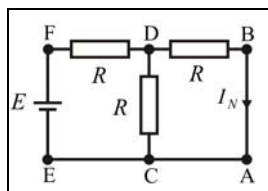
$$R_{T|E=0} = \frac{3}{2}R \quad \text{i} \quad U_T = U_{AB|_{R \rightarrow \infty}} = U_{CD} = \frac{1}{2}E.$$

Kada se na dobijeni ekvivalent priključi prethodno uklonjen otpornik dobija se:

$$I_{AB} = \frac{U_T}{R_T + R} = \frac{1}{5} \frac{E}{R}, \quad U_{AB} = I_{AB}R = \frac{1}{5}E.$$

♦ Nortonova teorema

Ekvivalentni strujni generator se dobija kada se ekvivalentna otpornost izračuna na isti način kao i za ekvivalentni naponski generator. Ekvivalentna jačina struje se dobija kad se tačke AB kratko spoje (struja kratkog spoja).



$$R_N = R_T = \frac{3}{2}R, \quad I_N = \frac{1}{3} \frac{E}{R}.$$

Kada se na ekvivalentni strujni generator ponovo priključi otpornik, struja se deli na struju kroz ekvivalentnu unutrašnju otpornost i struju kroz priključeni otpornik, $I_N = I_u + I_{AB}$. Kako su obe otpornosti priključene na isti napon, U_{AB} , sledi da je

$$I_u = \frac{2}{3}I_{AB}, \text{ a odavde sledi i već poznati rezultat } I_{AB} = \frac{3}{5}I_N = \frac{1}{5} \frac{E}{R}.$$

♦ Metod konturnih struja

Posmatrano električno kolo ima dve nezavisne konture i moguće ga je opisati sa dve nezavisne konturne struje, tj. sistemom od dve jednačine sa dve nepoznate. Neka su konture iste kao i u primeru neposredne primene

Kirchoffovih zakona. Konturna struja I_{k1} pripada konturi FECD, a konturna struja I_{k2} konturi DCAB.

Neka smerovi obilaska po konturama odgovaraju redosledu tačaka, pa sledi traženi sistem jednačina. Rešavanjem dobijenog sistema jednačina se dobija:

$$\begin{aligned} I_{k1} &= \frac{3}{5} \frac{E}{R}, & I_{k2} &= \frac{1}{5} \frac{E}{R}, \\ I_1 = I_{EC} = I_{k1}, & I_3 = I_{AB} = I_{k2}, & I_2 = I_{CD} = I_{k1} - I_{k2} &= \frac{2}{5} \frac{E}{R}. \end{aligned}$$

♦ Metod potencijala čvorova

Posmatrano električno kolo ima samo dva čvora i tri grane. Tačke B, D i F su na istom potencijalu ($\varphi_B = \varphi_D = \varphi_F = 0$) te je bilo koja od njih jedan čvor. Drugi čvor je tačka C. Prema metodu potencijala čvorova može da se postavi samo jedna jednačina

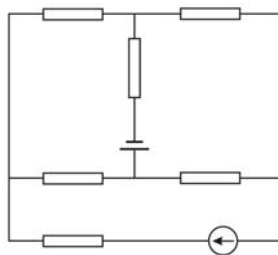
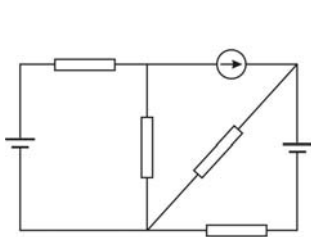
$$(G + G + \frac{1}{2}G)\varphi_C = GE \quad \text{iz koje sledi} \quad \varphi_C = \frac{2}{5}E, \quad \text{ili}$$

$$I_{AB} = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{2R} = \frac{2}{5}E \frac{1}{2R} = \frac{1}{5} \frac{E}{R}, \quad U_{AB} = I_{AB}R = \frac{1}{5}E.$$

Međutim, zbog ilustrativnosti pretpostavimo da je treći čvor tačka A. Tada je moguće postaviti sistem od dve jednačine sa dve nepoznate, čijim rešavanjem se dobija poznati rezultat.

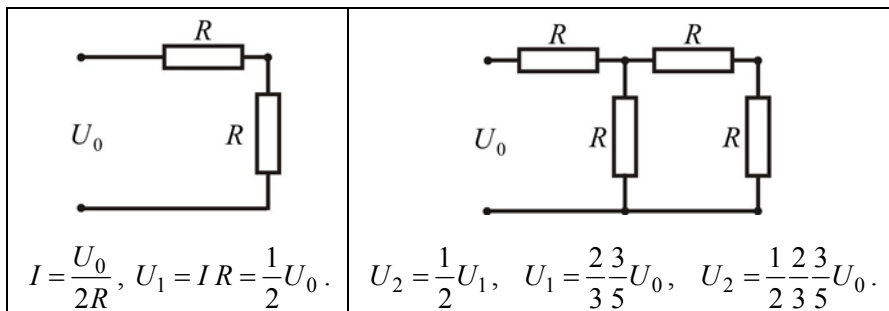
$$\begin{aligned} (G + G + G)\varphi_C - G\varphi_A &= GE \\ -G\varphi_C + (G + G)\varphi_A &= 0 \\ U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B &= \frac{1}{5}E \end{aligned}$$

♦ Zadaci za vežbu



Primer - Određivanje napona u otporničkoj kaskadi

Posmatra se prvo razdelnik napona ili jedna ćelija otporničke kaskade. Neposrednom primenom osnovnih zakona nalazi se da je napon na poslednjem otporniku polovina ulaznog napona. Razmatranje se proširuje na kaskadu koja se sastoji od dve ćelije i dobija se da je napon na poslednjem otporniku petina ulaznog napona.



Kad se u razmatranje uvrsti još jedna ćelija i kad se činioci proizvoda u brojiocu i imeniocu ne skraćuju sledi

$$U_3 = \frac{1}{2}U_2, \quad U_2 = \frac{2}{3} \frac{3}{5}U_1, \quad U_1 = \frac{5}{8} \frac{8}{13}U_0, \quad U_3 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{5} \frac{5}{8} \frac{8}{13}U_0.$$

Lako se uočava da se i u brojiocu i imeniocu poslednjeg izraza nalazi proizvod članova *Fibonacci*jevog niza koji se dobija tako što je svaki naredni član jednak zbiru prethodna dva. Upoštvanjem se dobija rezultat za kaskadu od $n=4$ ćelije.

$$U_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} U_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{3}{5} U_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \frac{8}{13} U_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \frac{8}{13} \cdot \frac{13}{21} \frac{21}{34} U_0$$

Na taj način se mogu odrediti svi naponi u otporničkoj kaskadi sa proizvoljnim brojem ćelija, a odnos ulaznog napona i napona na poslednjem otporniku u kaskadi od n ćelija je jednak vrednosti $2n$ -tog člana *Fibonacci*jevog niza koji generišu početne vrednosti $a_0 = 1, a_1 = 2$.

$$U_5 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \frac{8}{13} \cdot \frac{13}{21} \frac{21}{34} \cdot \frac{34}{55} \frac{55}{89} \cdot U_0$$

$\uparrow$
5

$\uparrow$
4

$\uparrow$
3

$\uparrow$
2

$\uparrow$
1

$\uparrow$
0

Tako je na primer, za $n=5$,

$$\frac{U_0}{U_5} = a_{10} = 89.$$

37 - Analogija statičkog i stacionarnog električnog polja

U delovima stacionarnog strujnog polja gde ne deluju elektromotorne sile gustina struje zadovoljava *Ohmov zakon* i prvi *Kirchoffov zakon*. Stacionarno električno polje je bezizvorno i bezvrtložno i može se opisati funkcijom električnog skalar potencijala. Iz ovih konstatacija sledi da funkcija potencijala zadovoljava *Laplaceovu jednačinu* koja je potpuno jednaka sa onom za elektrostatičko polje kad je provodnost sredine konstantna.

Pri istim graničnim uslovima rešenja *Laplaceove jednačine* su ista i nije važno da li je to elektrostatičko ili stacionarno električno polje.

Iz ove analogije sledi niz korisnih rezultata. U elektrostatičkom polju se definiše kapacitivnost, a u stacionarnom električnom polju se definiše provodnost. Izjednačavanjem izraza za napone koji se odatle dobijaju sledi veza između osnovnih veličina za ova dva polja. Kada jedna elektroda obuhvata drugu (sferni kondenzator, koaksijalni vod) analogiju je sa neznatnom greškom moguće proširiti.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

$$\sigma = \text{const.}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$C = q / U$$

$$G = I / U$$

$$\frac{q}{C} = \frac{I}{G}$$

Pomenuta greška se sastoji u zanemarivanju dela površine kroz koju prolazi provodnik od unutrašnje elektrode kroz spoljašnju. Tada je za homogeni i linearni, ali nesavršeni dielektrik, dakle dielektrik koji ima provodnost,

$$q = \varepsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad I = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Kad se ove formule uvrste u prethodnu relaciju sledi još jedna relacija koja se upotrebljava za proračun kapacitivnosti kada je poznata provodnost, i obrnuto.

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Do istog rezultata je moguće doći i kada se uporede formule za provodnost i kapacitivnost dela strujne tube.

Neka je ravan kondenzator ograničen elektrodama istog poprečnog preseka, S , čija je provodnost znatno veća od provodnosti dielektrika kojom je kondenzator ispunjen i kroz koji protiče struja. Deobom formula za provodnost i kapacitivnost (ovde je $l = d$) se dolazi do već poznatog odnosa.

$$G = \sigma \frac{S}{l}$$

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

Primer - Podužna odvodnost koaksijalnog voda

Neka je dat koaksijalni vod unutrašnjeg poluprečnika a i spoljašnjeg poluprečnika b koji je ispunjen homogenim, linearnim ali nesavršenim dielektrikom čija je dielektrična konstanta ϵ i provodnost σ . Vod je priključen na jednosmerni napon U .

Električno polje je radijalno i postoji samo u međuelektrodnom prostoru. Primenom *Gaussovog* zakona na zamišljenu cilindričnu površinu poluprečnika r , $a \leq r \leq b$, za jačinu električnog polja se dobija:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad E 2\pi r \Delta l = \frac{q' \Delta l}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r} \hat{r}.$$

Napon između elektroda je
$$U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{r} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a},$$

a podužna kapacitivnost je
$$C' = \frac{q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}.$$

U telekomunikacijama provodnost između elektroda koaksijalnog voda je nepoželjna karakteristika i naziva se odvodnost. Međutim, koaksijalni vod se primenjuje i kao linijski detektor požara i provale (na primer kad je vod nagažen ili nagoreo) i tada je brza promena odvodnosti poželjna karakteristika.

Na osnovu analogije podužna odvodnost koaksijalnog voda je konačno:

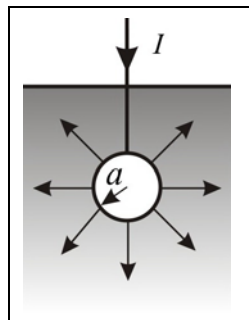
$$G' = C' \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

Do istog rezultata dolazi se i na sledeći način:

$$\begin{aligned} C = \frac{q}{U} &= \frac{1}{U} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\epsilon}{U} \oint_S \vec{E} d\vec{S} & \Leftrightarrow & G = \frac{I}{U} = \frac{1}{U} \oint_S \vec{J} d\vec{S} = \frac{\sigma}{U} \oint_S \vec{E} d\vec{S} \\ & \Downarrow & & \\ \frac{1}{U} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{C}{\epsilon} = \frac{G}{\sigma}. \end{aligned}$$

38 - Elektroda sfernog oblika u homogenoj sredini

Ako se elektroda sfernog oblika nalazi u sredini čija je provodnost u svim pravcima stalna, fluks vektora gustine struje kroz zamišljenu sfernu površinu poluprečnika r koja obuhvata elektrodu, $r \geq a$, mora biti jednak jačini struje koja utiče u elektrodu. Mala površina koju zauzima uvodni provodnik može biti zanemarena. Ako su ostale elektrode kroz koje se strujno polje zatvara dovoljno daleko, tada je stacionarno strujno polje radijalno.



Dobijaju se izrazi koji su formalno isti kao izrazi za električnu indukciju i električno polje naelektrisanе sfere, samo što umesto količine naelektrisanja stoji jačina struje i umesto dielektrične konstante specifična provodnost.

Statičko električno polje		Stacionarno električno polje	
$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$	$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$	$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$	$E(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}$

Primer - Tanka cilindrična elektroda u homogenoj sredini

Neka u elektrodu oblika cilindra, koja se nalazi u homogenoj sredini specifične provodnosti σ , kroz provodnik zanemarljivih dimenzija utiče struja jačine I . Kad su ostale elektrode kroz koje se zatvara strujno polje veoma udaljene, strujno polje u okolini elektrode je aksijalno simetrično u odnosu na osu elektrode.

Pošto je specifična provodnost sredine znatno manja od specifične provodnosti elektrode, moguće je koristiti analogiju sa odgovarajućim problemom elektrostatike.

Kapacitivnost cilindričnog provodnika konačne dužine $2h$ i poluprečnika a , koji je znatno manji od dužine, je poznata iz elektrostatike, pa se korišćenjem analogije dobija izraz za prelaznu otpornost (odvodnost) između elektrode i okolne sredine.

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{1}{C}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon h}{\ln \frac{2h}{a}}$$

$$R = \frac{\ln \frac{2h}{a}}{4\pi\sigma h}$$

39 - Granični uslovi

Analogija elektrostatičkog i stacionarnog električnog polja se proširuje i na granične uslove koji važe na razdvojnoj površini dve sredine različitih specifičnih provodnosti.

Granične uslove za vektor gustine struje je moguće izvesti na potpuno isti način kao i u slučaju elektrostatičkog polja. Primenom prvog *Kirchoffovog* zakona u integralnom obliku na zatvorenu cilindričnu površinu čije su osnovice paralelne razdvojnoj površini dve provodne sredine dobija se granični uslov za normalne komponente vektora gustine struje. Iz bezvrtložnog karaktera stacionarnog električnog polja sledi uslov za tangencijalne komponente vektora gustine struje (videti: Sveska I)

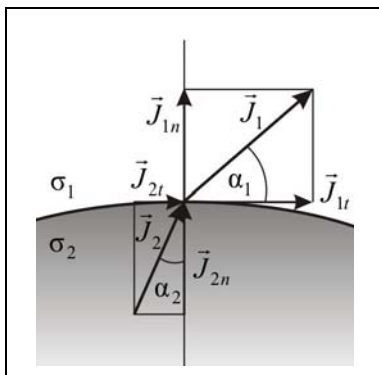
$$J_{1n} = J_{2n}$$

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$\frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Granični uslovi za vektor gustine struje i zakon o prelamanju linija stacionarnog strujnog polja dobijaju se i analogijom i to znatno jednostavnije. Potrebno je u graničnim uslovima za elektrostatičko polje vektor električne indukcije, $\vec{D}$, zameniti vektorom gustine struje, $\vec{J}$, a dielektričnu konstantu, ϵ , specifičnom električnom provodnošću, σ .

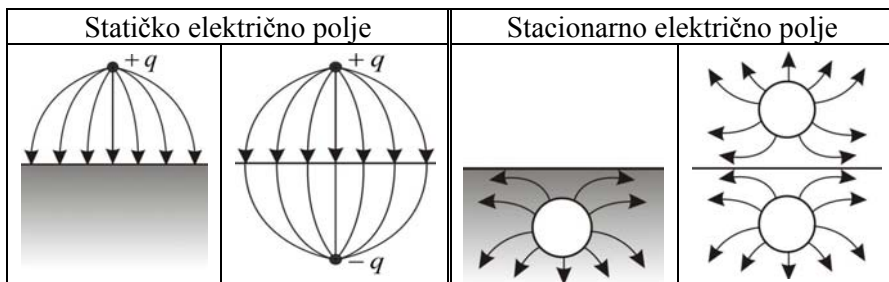


U specijalnom slučaju, kad je jedna sredina savršen provodnik, $\sigma_2 \rightarrow \infty$, a druga savršen izolator, $\sigma_2 \rightarrow 0$, što vrlo približno odgovara struji u provodniku koji se nalazi u vazduhu, sledi da je $J_{1n} = 0$, jer nema isticanja struje iz provodnika u okolni prostor. Iz prvog graničnog uslova sledi i da je $J_{2n} = 0$. Iz drugog i trećeg graničnog uslova se dobija da je $J_{1t} = 0$. Tako ostaje samo tangencijalna komponenta vektora gustine struje u provodniku koja je srazmerna tangencijalnoj komponenti električnog polja, $J_{2t} = \sigma_2 E_{2t}$. Konačno, pošto su to jedine komponente opet se dobija, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, što je poznat rezultat.

40 - Teorema lika

Vrlo čest slučaj vremenski konstantnog ili sporo promenljivog strujnog polja je kad se elektroda nalazi u provodnoj homogenoj sredini koja je ravnom površi ograničena sa jedne strane (poluprostor) dok je sa druge strane razdvojne površine neprovodna sredine tj. izolator. Pomoću izolovanog provodnika, čija je debljina znatno manja od svih ostalih dimenzija koje su od interesa, elektroda je spojena sa strujnim izvorom. Drugi kraj strujnog izvora je vezan za istu ili sličnu elektrodu koja je dovoljno daleko tako da ne utiče na raspodelu polja u posmatranoj okolini prve elektrode.

Kako nema isticanja struje u izolator to znači da su u svim tačkama razdvojne površine normalne komponente vektora gustine struje jednake nuli, $J_{1n} = J_{2n} = 0$. U provodnoj sredini uz samu graničnu površinu postoje samo tangencijalne komponente ovog vektora. Zato je uticaj izolatora iznad razdvojne površine na raspodelu polja u provodnoj sredini moguće zameniti ekvivalentnim strujnim izvorom tj. likom u ravnom ogledalu. Pri tom se i elektroda i njen lik nalaze u homogenoj sredini iste specifične provodnosti. Važno je uočiti da smer i jačina struje koja ističe ili utiče u lik moraju biti isti kao i za samu elektrodu.



Jedna od najvažnijih primena teorme lika je proračun uzemljivača. Uzemljivači su metalne elektrode ukopane u zemlju i povezane provodnikom za nadzemne delove uređaja za koje se želi da budu na potencijalu okolnog zemljišta. Uzemljivači su i deo instalacije za zaštitu od atmosferskog elektriciteta tj. uzemljivači su deo gromobranske instalacije objekata. Kad god je moguće, na isti uzemljivač ili sistem uzemljivača se povezuju svi vodovi električne instalacije koji su na nultom potencijalu i prihvatni sistem gromobranske instalacije. Time se u praksi potencijal okolnog tla uzima za površinu nultog potencijala. U teorijskim analizama, posebno u elektrostatici, tačke nultog potencijala (referentne tačke) najčešće su u beskonačnosti.

41 - Uzemljivač oblika sfere

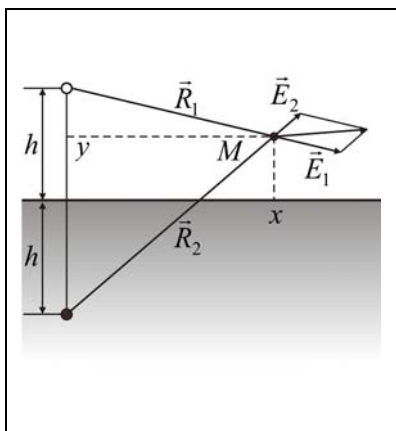
Kad je uzemljivač ukopan tako da je dubina ukopavanja znatno veća od njegovih dimenzija uticaj diskontinuiteta tj. razdvojne površine zemlja-vazduh je moguće zanemariti. Međutim, kad to nije slučaj neophodno je primeniti teoremu lika u ravnom ogledalu. Uticaj diskontinuiteta se zamenjuje uticajem simetričnog uzemljivača u odnosu na površinu zemlje tako što se lik postavlja u sredinu iste specifične provodnosti. Ukupno električno polje i gustina struje se dobijaju kao vektorski zbrojevi odgovarajućih polja koja potiču od uzemljivača i njegovog lika.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\hat{R}_1}{R_1^2}, \quad R_1 = \sqrt{x^2 + (h-y)^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\hat{R}_2}{R_2^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2 + (h+y)^2}$$

Kad je uzemljivač duboko ukopan u zemlju tada je $R_2 > R_1$, a posledično je $E_2 \ll E_1$, pa je uticaj lika moguće zanemariti, kao što je to već naglašeno.



Na površini zemlje, $y=0$, $R_1=R_2$, električno polje ima samo tangencijalnu komponentu čija jačina je jednaka dvostrukoj jačini električnog polja koje potiče ili od uzemljivača ili od lika.

$$E(x) = 2E_1 \cos \alpha = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{x}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Jačina polja na površini zemlje je jednaka nuli za $x=0$ i $x \rightarrow \infty$. Prema Rolleovoj teoremi između dve nule neprekidne funkcije postoji ekstremna vrednost. Ekstremna vrednost se dobija iz uslova da je prvi izvod po promenljivoj x jednak nuli.

U ovom slučaju to je maksimum (što se dokazuje znakom drugog izvoda) jačine električnog polja.

$$\frac{d}{dx} E(x) = 0$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{I}{\pi \sigma h^2}$$

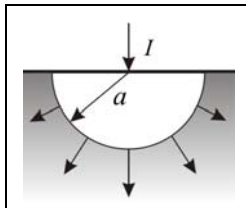
Napon između dve tačke na površini zemlje, je moguće izračunati tačno. Međutim, za mala rastojanja, l_k , je vrlo približno

$$U_k \approx E_{\max} l_k.$$

Za rastojanje l_k se uzima dužina koraka i U_k je napon koraka.

42 - Prelazna otpornost uzemljivača i napon koraka

Poluloptasta elektroda poluprečnika a načinjena je od dobrog provodnika i ukopana je u zemlju čija je specifična provodnost homogena i znatno manja od specifične provodnosti elektrode. Neka struja jačine I utiče u centar polulopte i neka su druge elektrode kroz koje se zatvara strujno kolo dovoljno daleko.



Tada je u okolini polulopte stacionarno strujno polje radijalno. Fluks vektora gustine struje postoji samo kroz zamišljenu polusferu poluprečnika r , jer nema isticanja struje u vazdušni prostor.

$$I = \oint_S \vec{J} d\vec{S} = J 2\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad J(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{I}{2\pi \sigma r^2}.$$

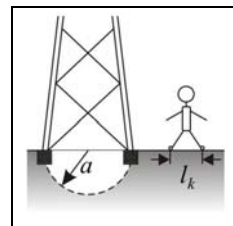
Za referentnu tačku u beskonačnosti potencijal je $\varphi(r) = \int_r^\infty E(r) dr = \frac{I}{2\pi \sigma r}.$

Količnik potencijala na površini elektrode i jačine struje je prelazna otpornost između uzemljivača i okolne sredine i često se naziva otpor uzemljenja.

$$R_{uz} = \frac{\varphi(r=a)}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma a}$$

Pomoću polulopte mogu se aproksimirati i elektrode koje nemaju taj geometrijski oblik. Na primer, otpornost uzemljenja stuba dalekovoda je približno jednaka otpornosti uzemljenja poluloptastog uzemljivača čiji je poluprečnik jednak poluprečniku kružnice opisane oko osnove stuba.

Kad kroz uzemljivač u okolnu zemlju ističe struja (udar groma, struja kratkog spoja) na površini zemlje se u bliskim tačkama pojavljuju značajne potencijalne razlike koje mogu da ugroze život ljudi i životinja. Za dve bliske tačke uzima se dužina koraka, l_k , a napon između tih tačaka je napon koraka, U_k ,



$$U_k = \varphi(r) - \varphi(r + l_k) = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{l_k}{r(r + l_k)} = I R_{uz} \frac{l_k a}{r(r + l_k)}.$$

Najveći napon koraka je u neposrednoj blizini uzemljivača i opada sa kvadratom rastojanja.

Numerički primer:

$$\sigma = 0.01 \text{ S/m}, \quad a = 1.0 \text{ m}, \quad I = 100 \text{ A}, \quad R_{uz} = 15 \Omega, \quad l_k = 0.8 \text{ m}, \quad U_k = 18 \text{ kV}.$$

43 - Merenje otpornosti uzemljivača

Merenje otpornosti najčešće se vrši nekom od metoda koji su zasnovani na ravnoteži električnog mosta. Prilikom merenja u tlo oko uzemljivača se pobadaju metalne sonde. Električni most se formira sa dve ili tri merne sonde i uzemljivačem kao primarnom elektrodom koja se obično označava kao Z , a čija nepoznata otpornost, R_x , se meri.

Za električni most sa dve merne sonde se dobija,

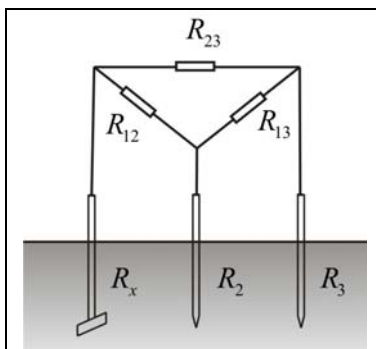
$$R_{12} = R_x + R_2,$$

$$R_{13} = R_x + R_3,$$

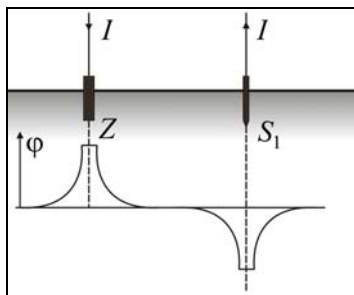
$$R_{23} = R_2 + R_3,$$

i konačno,

$$R_x = \frac{R_{12} + R_{13} - R_{23}}{2}.$$



Prilikom merenja otpornosti uzemljivača je potrebno pažljivo odabrati mesta postavljanja (pobadanja) mernih sonde. Da bi se otklonile greške u merenju, merne sonde moraju biti na dovoljno velikim rastojanjima od uzemljivača. Dovoljno veliko rastojanje podrazumeva da merna sonda nije u naponskom levku uzemljivača.



U praksi se najčešće koriste rastojanja veća od 20 m.

44 - O gustinima naelektrisanja

Kod nesavršenih dielektrika provodnost je veoma mala, pa se pri proračunu stacionarnog strujnog polja uzimaju u obzir i dielektrične osobine sredine. U opštem slučaju osobine sredine zavise od prostornih koordinata, pa sledi sledeće razmatranje.

Maxwellov postulat	Prvi Kirchhoffov zakon
$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho$	$\operatorname{div} \vec{J} = \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\epsilon \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon = \rho$	$\sigma \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \operatorname{grad} \sigma = 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\rho = \sigma \vec{E} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} \epsilon - \frac{\epsilon}{\sigma^2} \operatorname{grad} \sigma \right) = \vec{J} \operatorname{grad} \frac{\epsilon}{\sigma}$	

Iz poslednjeg izraza je jasno da ako odnos σ/ϵ nije konstantan, u sredini postoji višak slobodnih naelektrisanja istog znaka. To znači da je kod dobrih provodnika, $\sigma \rightarrow \infty$, zapreminska gustina slobodnih naelektrisanja zanemarljiva jer je odnos σ/ϵ blizak nuli i praktično konstantan, pa je zapreminska gustina naelektrisanja kao izvod konstante jednaka nuli. Suprotno, kod loših provodnika tj. nesavršenih dielektrika mogu postojati slobodna naelektrisanja i to posebno na razdvojn timer površinama dva dielektrika.

Istovremeno zadovoljavanje graničnih uslova za normalnu komponentu vektora električne indukcije je moguće samo ako na razdvojnoj površini postoje slobodna naelektrisanja.

Statičko električno polje	Stacionarno električno polje
$\epsilon_1 \vec{E}_{1n} - \epsilon_2 \vec{E}_{2n} = \eta$	$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\eta = \sigma_2 E_{2n} \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) = J_n \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$	

Smer struje, odnosno znak površinske gustine naelektrisanja, zavisi od električnih osobina sredina.

45 - Vreme relaksacije

Brzina rasturanja nagomilanih slobodnih naelektrisanja zavisi od specifične provodnosti i dielektrične konstante sredine. Neka je, zbog jednostavnosti u razmatranju, sredina linearna i homogena. Tada je:

na osnovu *Maxwellovog* postulata

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

na osnovu jednačine kontinuiteta i *Ohmovog* zakona

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Izjednačavanjem desnih strana poslednja dva izraza dobija se linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Jednačinu je moguće preurediti na oblik koji radvaja promenljive. Nakon integracije leve i desne strane dobija se opšte rešenje koje sadrži i konstantu integracije, $\ln C$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \partial t$$

$$\ln \rho = -\frac{\sigma}{\varepsilon} t + \ln C \quad \Rightarrow \quad \rho = C e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

Za određivanje konstante integracije neophodan je i početni uslov. Neka je u trenutku $t=0$ zapreminska gustina naelektrisanja bila ρ_0 . Tada se jednostavno dobija da je $C = \rho_0$, a odatle i zakon rasturanja naelektrisanja.

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

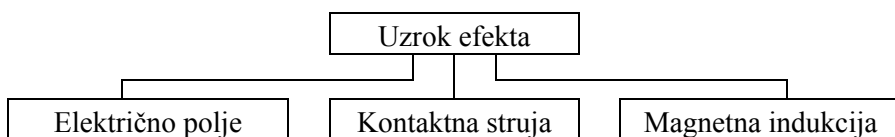
Konstanta $\tau = \varepsilon / \sigma$ ima dimenziju vremena i naziva se vreme relaksacije. Posle vremena $t = \tau$ gustina naelektrisanja u materijalu opadne na e -ti deo prvobitne gustine ρ_0 .

U dobrim provodnicima vreme relaksacije je veoma kratko, praktično naelektrisanja se rasturaju trenutno. Zbog toga se za dobro provodne sredine uvek uzima da je $\rho = 0$. U dobrim dielektricima, na primer, dielektrici kojima se pune kondenzatori, vreme relaksacije može da bude od nekoliko dana do nekoliko godina.

Materija	σ [S/m]	ε_r	τ [s]
Bakar	$59.6 \cdot 10^6$	$6.10 \cdot 10^0$	$9.06 \cdot 10^{-19}$
Trafo ulje	$1.0 \cdot 10^{-18}$	$2.30 \cdot 10^0$	$2.30 \cdot 10^{18}$
Mišićno tkivo	$20.2 \cdot 10^{-3}$	$2.57 \cdot 10^7$	$1.13 \cdot 10^{-2}$

46 – Neki efekti jednosmerne struje na ljude

Efekti direktnog kontakta ljudi sa naelektrisanim telima su prvo proučeni jer su vidljivi (videti: Sveska I). Kad se došlo do saznanja o električnoj struji postalo je jasno da kroz ljudsko telo koje je u kontaktu sa naelektrisanim telom protiče električna struja. Jačinu kontaktne struje, I_c , je danas čak moguće i izmeriti. Razvojem teorije makroskopskih elektromagnetnih polja došlo se do saznanja da stacionarno električno polje prouzrokuje kretanje nosilaca naelektrisanja tj. stacionarnu električnu struju koja neminovno stvara stacionarno magnetno polje. O stvarnim efektima na ljudski organizam koje prouzrokuju električno i magnetno polje se još uvek veoma malo zna. Međutim, ipak su svi efekti podeljeni u tri kategorije.



Danas je dobro poznato da promenljivo magnetno polje stvara električno polje i posledično električnu struju (videti: Sveska III). Zato efekte koje prouzrokuje stacionarna električna struja treba podeliti u dve grupe. U prvu grupu spadaju efekti proizvedeni direktnim kontaktom nekog dela ljudskog tela sa drugim telom čiji je potencijal različit od potencijala ljudskog tela. Drugu grupu čine efekti proizvedeni indukovanim strujama u ljudskom telu. Međutim, pri niskim učestanostima, gde spada i industrijska učestanost od 50 Hz, elektromagnetno polje je moguće tretirati kao kvazistacionarno, pa se samo na osnovu jačine kontaktne struje i već poznatih elektromagnetnih osobina ljudskog tela postavljaju granice za maksimalnu dozvoljenu izloženost elektromagnetnom polju (MPE - *Maximum Permissible Exposures*)

MPE za $f \leq 50$ Hz

Standard i godina		E [kV/m]	I_c [mA]	B [mT]
NRPB (1993)	profesionalci	12.0	1.0	1.300
	stanovništvo	12.0	0.5	1.300
ICNIRP (1998)	profesionalci	8.3	1.0	0.420
	stanovništvo	4.2	0.5	0.083
IEEE (1999)	profesionalci	20.0	1.5	2.710
	stanovništvo	5.0	0.5	0.904

*Puni nazivi standarda dati su u Literaturi

Literatura

- Krstić, D.D, *Elektrostatički modeli rezervoara sa naftnim derivatima – Magistarska teza*, Elektronski fakultet, Niš, 1999.
- Petković, D.M, *Raspodela gustine jednosmerne struje u masivnim provodnicima - Magistarska teza*, Elektronski fakultet, Niš, 1983.
- Petković, D.M, Krstić, D.D : DC density distribution at strip conductors, *Zbornik radova sa X Naučnog skupa i I Međunarodne konferencije Preventivni inženjerig i informacione tehnologije*, PIIT '94, Niš, 1994, pp. 46.1-4.
- Petković, D.M, Krstić, D.D, Raspodela potencijala i gustine jednosmerne struje u masivnim provodnicima kružnog poprečnog preseka, *Zbornik radova sa XL Konferencije ETRAN*, Budva, 1996, pp. II 438-441.
- Petković, D.M, *Elektrostatičko polje u radnoj i životnoj sredini-prvi deo*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2005.
- Petković, D.M, Krstić, D.D. *Elektrostatika*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2005.
- Petković, D.M, Krstić, D.D, Stanković, V.B, The Effect of Electric Field on humans in the Immediate Vicinity of 110kV Power Lines, *Facta Universitatis, Ser. Working and Living Environmental protection*, Vol.3, No 1, 2006, pp.63-72.
- Popović, D. *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd. 1980.
- Surutka, J. *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd. 1975.
- Veličković, M.D. *Elektromagnetika*, Elektronski fakultet, Niš, 1994.
- Veličković, M.D. i saradnici, *Zbirka rešenih zadataka iz elektromagnetike, prvi deo*, Elektronski fakultet, Niš, 2000.
- NRPB, „Board statement on restrictions on human exposure to static and time varying electromagnetic fields and radiation documents of the NRPB,” Nat. Rad. Protection Board, Chilton, Didcot, Oxon., U. K., Doc. NRPB, vol. 4, no. 5, 1993
- ICNIRP, „Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, electromagnetic fields (up to 300 GHz)-ICNIRP guidelines,” *Health Phys.*, vol. 74, no. 4, pp. 494-522, 1998.
- IEEE, „Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radio frequency Electromagnetic fields,” IEEE Standard C 95. 1-1991, 1999.
- American National Standard Institute
<http://www.ansi.org>
- US Department of labor, Occupational Safety & Health Organization,
<http://www.osha.gov>

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

621.3.024(075.8)

537.2(075.8)

ПЕТКОВИЋ, Дејан М., 1952-

Elektromagnetna zračenja : izvodi sa
predavanja i vežbi. #Sv. #2, Stacionarno
električno polje i jednosmerna struja / Dejan
M. Petković, Dejan D. Krstić, Vladimir B.
Stanković. - 1. izd. - Niš : Fakultet zaštite
na radu, 2011 (Niš : Rolerprint). - 61 str. :
ilustr. ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Nišu. -
Tiraž 200. - Bibliografija: str. 60.

ISBN 978-86-6093-014-1

1. Крстић, Дејан Д., 1969- [аутор] 2.

Станковић, Владимир Б., 1978- [аутор]

а) Електростатика б) Електрична струја,
једносмерна

COBISS.SR-ID 181344524